

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática



Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações

Teresa Caissotti

Mestrado em Matemática para Professores

Setembro 2012

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática



Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações

Teresa Caissotti

Dissertação orientada pela
Professora Doutora Maria Carlota Rebelo Gonçalves

Mestrado em Matemática para Professores

Setembro 2012

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao Departamento de Matemática da FCUL nas pessoas da Professora Carlota Gonçalves e do Professor Owen Brison responsáveis pelo Mestrado Matemática para Professores 2010/2012, por me ter proporcionado este mestrado, que foi muito importante nesta fase da minha vida, não só pelo estímulo intelectual, como por me ter ajudado a tornar-me uma pessoa mais completa na minha profissão.

A todos os professores que nestes dois anos lecionaram as cadeiras: Professor Pedro Freitas, Professor Eduardo Severino, Professora Eugénia Captivo, Professor Luís Sanchez, Professora Carlota Gonçalves, Professor Alessandro Margheri, Professora Cecília Ferreira por neste período me terem ensinado e partilhado, com um enorme profissionalismo, conhecimentos matemáticos que desconhecia ou que há muito estavam escondidos nos meandros da minha memória. Não posso esquecer a minha amiga Catarina Santa-Clara, por ter tentado o impossível!

Aos 'oito magníficos' por terem sido sempre leais, amigos e companheiros nestes dois anos de trabalho árduo.

Je tiens vraiment à remercier le Professeur Jean Mawhin pour sa totale disponibilité à me faire parvenir ses articles qui sont, en réalité, le support de ce travail ainsi que pour la gentillesse des mots qu'il m'a adressé lors de l'envoi des articles.

Novamente agradeço à minha orientadora Professora Carlota Gonçalves por ter tido tanta paciência para me aturar nos meus 'arrufos' com assuntos em que ia tropeçando; pela constante disponibilidade em esclarecer sempre as minhas dúvidas; pelo estímulo e 'pressão' que senti sempre da sua parte e pelas inúmeras revisões que fez deste trabalho.

Agradeço de um modo geral a todos os meus familiares, amigos e colegas que sempre me apoiaram, incentivaram e ajudaram.

Ao meu marido por me ter aturado nas minhas angústias e nas minhas

dúvidas.

Aos meus filhos por terem tido a paciência necessária para uma mãe estudante.

À minha Mãe aquele **BEM-HAJA** muito especial...

Teresa

Lisboa, 26 de setembro de 2012

Resumo

Nesta dissertação e seguindo sobretudo os trabalhos apresentados por Shashkin em [15] e os artigos de Jean Mawhin [4], [9], [10], [11], [12] faz-se uma breve exposição sobre o teorema do ponto fixo de Brouwer, demonstrando-o para $n = 1$ utilizando a equivalência ao teorema do valor intermédio; para $n = 2$ utilizando os lemas de Sperner e para outras dimensões n utilizando o conceito de grau topológico. Apresentam-se ainda algumas aplicações do teorema de Brouwer e do teorema de Borsuk-Ulam.

Palavras-chave: Pontos fixos, teorema de Brouwer, lemas de Sperner, grau topológico de Brouwer.

Abstract

In this monography, following the work of Shashkin [15] and the articles of Jean Mawhin [4], [9], [10], [11], [12] we present a short exposition of Brouwer fixed point theorem, proving it, for $n = 1$ using its equivalence to Bolzano intermediate value theorem; for $n = 2$ usig Sperner's lemmas; and for other dimensions using the concept of topologigal degree. Finally we present some applications of Brouwer theorem and Borsuk-Ulam theorem.

Key-words: fixed points, Brouwer theorem, Sperner's lemma and Brouwer topological degree.

Índice

1	Introdução	1
2	Teoremas do Ponto Fixo	5
2.1	Teorema de Brouwer e sua equivalência, no caso $n = 1$ ao teorema do valor intermédio	6
2.2	Teorema de Brouwer para $n = 2$	11
2.2.1	Lemas combinatórios de Sperner	11
2.2.2	Demonstração do teorema de Brouwer para $n = 2$	19
2.3	Teorema de Leray-Schauder	23
3	Teoremas relacionados com o teorema do ponto fixo de Brouwer	25
4	Grau topológico de uma aplicação	33
4.1	Grau de uma aplicação em \mathbb{R}	33
4.2	Grau de uma aplicação em \mathbb{R}^n	36
4.3	Demonstração do teorema de Brouwer utilizando o grau topológico	38
4.4	Teorema da esfera cabeluda	39
5	A surpresa da dimensão infinita	41
6	Aplicações dos teoremas apresentados	43
6.1	Uma aplicação algébrica	43
6.2	Uma aplicação geométrica	45
6.3	Uma aplicação 'meteorológica'	52
6.4	Uma aplicação 'Groumet 1'	52

6.5	Uma aplicação 'Groumet 2'	54
6.6	Uma aplicação 'ruidosa'	55
6.7	Uma aplicação 'cosmética'	56
7	Apêndices	58
7.1	Biografia	58
7.1.1	Luitzen Egbertus Jan Brouwer	58
7.1.2	Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano	59
7.1.3	Karol Borsuk	60
7.1.4	Augustin Louis Cauchy	60
7.1.5	Simon Stevin	61
7.1.6	George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor	62
7.1.7	Stanislaw Marcin Ulam	63
7.1.8	Karl Theodor Wilhelm Weierstrass	64
7.1.9	Emanuel Sperner	65
7.1.10	Jean Leray	65
7.1.11	Juliusz Pawel Schauder	66
7.1.12	Jules Henri Poincaré	67
7.1.13	Hugo Dyonizy Steinhaus	68
7.1.14	Heinrich Franz Friedrich Tietze	69
7.2	Alguns conceitos e definições	69
	Bibliografia	74

Capítulo 1

Introdução

Por vezes estamos interessados em obter as soluções de uma equação

$$f(x) = c \tag{1.1}$$

sendo f uma aplicação contínua, definida num intervalo fechado $[a, b]$ com valores em \mathbb{R} .

Se escrevermos $F(x) = f(x) + x - c$, vemos que F é contínua e resolver (1.1) equivale a encontrar um x tal que

$$F(x) = x \tag{1.2}$$

A um ponto x que verifica (1.2) chama-se *ponto fixo* da aplicação F .

Há conjuntos X para os quais qualquer aplicação contínua de X nele próprio tem pelo menos um ponto fixo. Diz-se que estes conjuntos têm a propriedade do ponto fixo (ver apêndice definição 7.2.8) .

Muitas vezes é difícil saber se uma aplicação f tem ou não pontos fixos. Por outro lado, além da existência ou não de ponto fixo de uma aplicação também nos pode interessar saber se ele é único ou não. Teoremas que nos garantem existência e, por vezes, unicidade de soluções de equações de ponto fixo são chamados teoremas do ponto fixo.

Estes teoremas têm várias aplicações em matemática. Grande parte dos teoremas que garantem a existência de soluções de equações diferenciais, integrais, ou outras podem ser demonstrados utilizando teoremas de ponto fixo.

Os teoremas do ponto fixo são usados em outras áreas de ciência, como por exemplo em economia, teoria de jogos, informática.

A teoria dos pontos fixos diz respeito à Topologia, ramo da matemática criada nos finais do séc. XIX que usa noções como por exemplo continuidade, compacidade, homotopia.

Um nome importante e que deve ser referenciado é Luitzen Egbertus Jan Brouwer (ver Secção 7.1.1) que provou que qualquer função contínua de um cubo n -dimensional nele próprio tem pelo menos um ponto fixo. L.E.J. Brouwer foi ainda o fundador do Intuicionismo, uma doutrina matemática que defende a intuição como sendo a base do conhecimento, por oposição ao Formalismo.

Iremos enunciar e demonstrar o teorema de Brouwer. Optámos por fazer a sua demonstração para a dimensão 1 e mostrar a sua equivalência ao teorema do valor intermédio, porque pela sua simplicidade poderá ser estudado pelos alunos do ensino secundário por exemplo num clube de matemática. Para $n = 2$ a demonstração apresentada recorre aos lemas de Sperner, caso que também poderá ser estudado por alunos interessados do ensino secundário. Apresentamos ainda o teorema de Leray-Schauder e a sua equivalência ao teorema de Brouwer.

No capítulo 3, falamos do teorema de Borsuk-Ulam (que também se pode apresentar aos alunos do secundário), do teorema da não-retração de um teorema que nos dá a unicidade do ponto fixo, o teorema da contração. No capítulo 6 apresentamos aplicações dos teoremas enunciados e demonstrados anteriormente, aplicações estas que facilitam uma melhor compreensão dos teoremas e suas consequências.

Este trabalho estaria incompleto se não fosse introduzido um capítulo sobre o grau topológico de uma aplicação. No capítulo 4, apresentamos a definição de grau topológico e usamos esse conceito para demonstrar o teorema de Brouwer para dimensão n .

No capítulo 5 iremos ver o que acontece ao teorema de Brouwer e ao teorema da não-retração se estivermos a trabalhar em dimensão infinita.

Em apêndice apresentamos na secção 7.1 uma reduzida biografia dos matemáticos que estão intimamente ligados aos assuntos estudados neste trabalho. Na secção 7.2 apresentamos alguns conceitos e definições que embora não sejam objeto de estudo neste trabalho são necessários para o seu desenvolvimento.

Capítulo 2

Teoremas do Ponto Fixo

Assim como Bach, Beethoven e Brahms são conhecidos como os três B's da música clássica, Bolzano (ver Secção 7.1.2), Brouwer e Borsuk (ver Secção 7.1.3) são citados como os três B's da teoria topológica de pontos fixos. As histórias destes três B's confunde-se com a própria história da teoria de pontos fixos[5].

Em 1817 deve-se a Bernard Bolzano e a Cauchy (ver Secção 7.1.4) a demonstração daquele que se considera o primeiro teorema topológico de ponto fixo, teorema do valor intermédio, que foi enunciado no final do século XVI por Stevin (ver Secção 7.1.5).

A história do teorema de Brouwer tem vários episódios associados. A motivação inicial de Brouwer foi a de resolver o problema da invariância da dimensão ou seja provar que \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p são homeomorfos (ver Apêndice - definição 7.2.6) se e só se $n = p$, problema este aberto pelo matemático russo, Georg Cantor (ver Secção 7.1.6). Brouwer provavelmente inspirado nos trabalhos de Bolzano um século antes, desenvolveu em 1911 a teoria do *grau topológico* (ver Capítulo 4), uma técnica que lhe permitiu, em 1912, demonstrar o teorema do ponto fixo para aplicações contínuas numa bola de \mathbb{R}^n nela mesma. A versão mais simples, em dimensão um, é uma consequência imediata do teorema do valor intermédio.

A prova do teorema de Brouwer para dimensões elevadas pode ser consi-

derado um dos marcos iniciais da ligação entre Topologia Geral e Topologia Algébrica. É já neste último contexto que surge o clássico teorema de Borsuk-Ulam, conjecturado por Stanislaw Ulam (ver Secção 7.1.7) e provado em 1933 por Karol Borsuk. É um resultado com implicações curiosas, como o teorema da meteorologia ver Secção 6.3; o teorema da bissecção, conhecido como o teorema das panquecas para dimensão 2 ver Secção 6.4 e o teorema da sanduíche de presunto, que neste trabalho toma o nome de teorema da sandes mista ver Secção 6.5, para dimensão 3.

Neste trabalho iremos considerar, para cada $n \geq 1$,

$$B^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

bola unitária em \mathbb{R}^n , onde a norma de x é dada por, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Temos que $B^1 = [-1, 1]$, B^2 é o círculo de centro em zero e raio 1 do plano; B^3 é a esfera de centro em zero e raio 1 do espaço.

A fronteira de B^n

$$\partial B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

é a esfera unitária, S^{n-1} em \mathbb{R}^n .

O interior de B^n

$$\text{int}(B^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

2.1 Teorema de Brouwer e sua equivalência, no caso $n = 1$ ao teorema do valor in- termédio

O teorema de Brouwer em dimensão n admite uma quantidade de formulações equivalentes e pode ser demonstrado por técnicas muito diversificadas, por exemplo utilizando topologia algébrica, análise, topologia diferencial, combinatoria, geometria algébrica e mesmo com técnicas de álgebra.

Teorema 2.1 (de Brouwer). Toda a aplicação contínua $f : B^n \longrightarrow B^n$, tem pelo menos um ponto fixo em B^n .

É fonte de várias aplicações como por exemplo na demonstração de teoremas da não-retração e da invariância do domínio, na biologia matemática, na geometria de corpos convexos, nas equações diferenciais, na teoria de jogos, na programação não linear, na teoria da decisão, na economia.

Dada a simplicidade do seu enunciado e demonstração pra o caso de $n = 1$ poderá ser introduzido e explorado para alunos do ensino secundário, bem como a equivalência ao teorema do valor intermédio, teorema estudado no 12º ano de escolaridade; por isto optámos por apresentar neste trabalho tanto a demonstração do teorema de Brouwer para $n = 1$ como a equivalência ao teorema do valor intermédio.

Teorema 2.2 (do valor intermédio). Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Qualquer que seja o valor c com $f(a) \leq c \leq f(b)$, existe pelo menos um valor x_0 compreendido entre a e b tal que $f(x_0) = c$.

Demonstração. do teorema de Brouwer para $n = 1$

Seja $f : B^1 \longrightarrow B^1$ uma função contínua.

Consideremos a função, $F : B^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(p) = f(p) - p$. Temos que:

$$F(-1) = f(-1) + 1 \geq 0 \text{ e } F(1) = f(1) - 1 \leq 0 \quad (2.1)$$

Então pelo teorema do valor intermédio sabemos que existe $x_0 \in [-1, 1]$ tal que:

$$F(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0.$$

Ou seja x_0 é ponto fixo de f . (q.e.d.)

Este resultado pode ser aplicado a qualquer intervalo fechado $I = [a, b]$.

Intuitivamente podemos observar o seguinte: seja f uma função contínua dum intervalo fechado $[a, b]$ nele próprio. O gráfico da função f é uma curva

contínua que une um ponto do lado esquerdo do quadrado $[a, b] \times [a, b]$, a um ponto do lado direito; logo o gráfico de f terá que intersestar a diagonal do quadrado. As coordenadas $(x_0, f(x_0))$ de qualquer ponto do gráfico que pertence à diagonal, satisfazem a condição $f(x_0) = x_0$. Ver Figura 2.1.

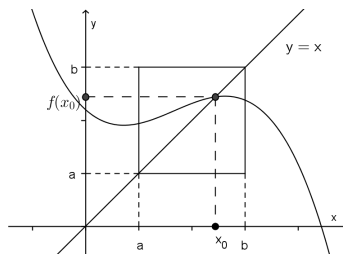


Figura 2.1: ponto fixo no intervalo

Na demonstração anterior ficou claro que o teorema do valor intermédio implica o teorema de Brouwer para $n = 1$. Vamos agora apresentar a implicação contrária, para então podermos concluir que o teorema do valor intermédio é equivalente ao teorema de Brouwer no caso de $n = 1$.

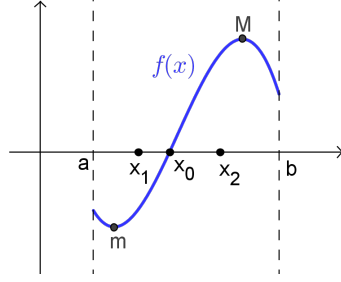
Proposição 2.1.1. Teorema de Brouwer para $n = 1 \Rightarrow$ teorema do Valor Intermédio

Demonstração. Primeiro analisemos o caso particular em que $c = 0$, e consequentemente $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. A ideia da demonstração é construir uma nova função contínua $\varphi(x) = \lambda f(x) + x$, definida no mesmo intervalo fechado, onde o parâmetro $\lambda \neq 0$ é escolhido de modo a que a função $\varphi(x)$ transforme o intervalo $[a, b]$ nele próprio ver Figura 2.2b. Esta escolha garante pelo teorema de Brouwer que $\varphi(x)$ tem pelo menos um ponto fixo x_0 no intervalo $[a, b]$.

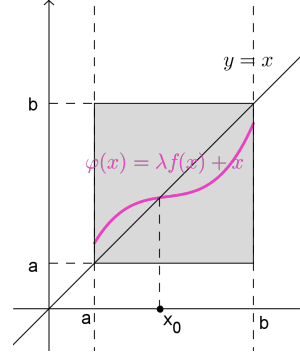
Ter-se-á então $\varphi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow \lambda f(x_0) + x_0 = x_0 \Leftrightarrow \lambda f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$.

Vejamos como escolher λ .

Pelo teorema de Weierstrass, ver Secção 7.1.8, sabemos que a função f é limitada e tem um máximo e um mínimo, ou seja existem m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer $x \in [a, b]$, ver Figura 2.2a. Neste caso temos em particular $m < 0$ e $M > 0$. Como f é contínua e $f(a) < 0 < f(b)$, podemos



(a) Função f contínua em $[a, b]$



(b) Função contínua $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$

Figura 2.2: Teorema de Brouwer \Rightarrow Teorema Valor Intermediário

escolher um x_1 tal que $f(x) < 0, \forall x \in [a, x_1]$. Escolhemos também x_2 , tal que $f(x) > 0, \forall x \in [x_2, b]$.

Seja

$$\lambda = \max \left\{ \frac{a - x_1}{M}, \frac{b - x_2}{m} \right\} \quad (2.2)$$

λ será igual a um dos dois valores negativos $\frac{a - x_1}{M}$ ou $\frac{b - x_2}{m}$.

Vejamos agora que para o λ escolhido em (2.2) vamos ter $\phi(x) \geq a$ para $x \in [a, b]$. Começemos por considerar os valores de $x \in [a, b]$ tais que $f(x) \geq 0$. Como $\lambda \geq \frac{a - x_1}{M}$, multiplicando ambos os membros da inequação por $f(x)$, temos $\lambda f(x) \geq \frac{a - x_1}{M} f(x)$ e usando a desigualdade $-f(x) \geq -M$, ficamos com:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda f(x) + x \geq \frac{a - x_1}{M} f(x) + x \\ &= \frac{a - x_1}{-M} (-f(x)) + x \\ &\geq \frac{a - x_1}{-M} (-M) + x \\ &= a - x_1 + x \end{aligned}$$

isto implica que: $\varphi(x) \geq a - x_1 + x \geq a$ ou seja

$$\varphi(x) \geq a \quad \text{para todo o } x \in [a, b] \quad \text{tal que } f(x) \geq 0 \quad (2.3)$$

Para x tal que $f(x) < 0$ temos $\lambda f(x) > 0$ e $\varphi(x) = \lambda f(x) + x \geq x \geq a$, ou seja

$$\varphi(x) \geq a \quad (2.4)$$

De (2.3) e de (2.4), concluimos que $\forall x \in [a, b], \varphi(x) \geq a$.

Vejamos agora que $\varphi(x) \leq b, \forall x \in [a, b]$.

Seja $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$. Então

$$\begin{aligned} \lambda f(x) \leq 0 &\Rightarrow \varphi(x) = \lambda f(x) + x \leq x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) \leq b \end{aligned} \quad (2.5)$$

Seja $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq 0$. Como $\lambda \geq \frac{b-x_2}{m}$ multiplicando ambos os membros da desigualdade por $f(x)$ temos : $\lambda f(x) \leq \frac{b-x_2}{m} f(x)$ e aplicando o mesmo artifício semelhante ao que usámos anteriormente, temos então:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda f(x) + x \leq \frac{b-x_2}{m} f(x) + x \\ &= \frac{b-x_2}{-m} (-f(x)) + x \\ &\leq \frac{b-x_2}{-m} (-m) + x \\ &= b - x_2 + x \end{aligned}$$

Isto implica que $\varphi(x) \leq b - x_2 + x \leq b$, ou seja

$$\varphi(x) \leq b \quad \text{para todo o } x \in [a, b] \quad \text{tal que } f(x) \leq 0 \quad (2.6)$$

De (2.5) e de (2.6), concluimos que $\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq b$.

Ficou provado que a função contínua $\varphi(x)$ aplica $[a, b]$ em $[a, b]$, então estamos nas condições necessárias para aplicar o teorema de Brouwer ($n = 1$) e concluimos que $\varphi(x)$ tem pelo menos um ponto fixo x_0 em $[a, b]$. Ou seja

$$\varphi(x_0) = \lambda f(x_0) + x_0 = x_0 \Leftrightarrow \lambda f(x_0) = 0 \underset{(\lambda \neq 0)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = 0$$

Para $c \neq 0$, basta seguirmos o mesmo raciocínio utilizando a função

$$\varphi_c = \lambda[f(x) - c] + x$$

(q.e.d.)

Podemos então concluir que para $n = 1$ o teorema de Brouwer é equivalente ao teorema do valor intermédio.

2.2 Teorema de Brouwer para $n = 2$

Como B^2 é homeomorfo ao quadrado, Q , se demonstrarmos a existência de ponto fixo para toda a aplicação contínua de um quadrado nele mesmo, temos demonstrado o teorema de Brouwer para $n = 2$ (ver Proposição 7.2.1).

No entanto antes de apresentarmos a demonstração do teorema de Brouwer num quadrado, iremos apresentar alguns teoremas combinatórios devidos ao matemático alemão, Emanuel Sperner (ver Secção 7.1.9).

2.2.1 Lemas combinatórios de Sperner

Primeiro lema de Sperner

Lema 2.3 (de Sperner para um intervalo fechado). Consideremos um intervalo fechado, $I = [a, b]$. Divida-se este intervalo num número finito de subintervalos e etiquetem-se os extremos dos subintervalos da seguinte maneira:

atribui-se ao extremo inferior a , a etiqueta 0 e ao extremo superior b , a etiqueta 1; os extremos de cada um dos subintervalos serão marcados aleatoriamente, com etiquetas 0 ou 1.

Então, existe pelo menos um intervalo da partição cujos extremos têm etiquetas distintas. Se existir mais do que um intervalo nestas condições, eles serão em número ímpar.

Demonstração. Iremos chamar *intervalo aceitável* a um intervalo cujos extremos estão etiquetados com números diferentes. Existem apenas duas possibilidades:

i) o intervalo inicial está subdividido em subintervalos cujos extremos têm etiquetas todas iguais a zero, ver Figura 2.3.

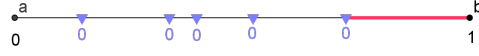


Figura 2.3: Subdivisão do intervalo em subintervalos cujos extremos têm etiquetas iguais

No caso da Figura 2.3 temos apenas um *intervalo aceitável* que é o último.

ii) o intervalo inicial está subdividido com pelo menos uma etiqueta 1, num extremo diferente de b , ver Figura 2.4.

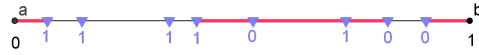


Figura 2.4: Subdivisão do intervalo com etiquetas diferentes

No caso da Figura 2.4 temos 5 *intervalos aceitáveis*.

Observemos que, sendo o extremo esquerdo do intervalo original 0, o primeiro *intervalo aceitável* é do tipo $(0, 1)$. Da mesma forma, como o extremo direito do intervalo original é 1, temos que o último *intervalo aceitável* também é do tipo $(0, 1)$. Assim os *intervalos aceitáveis* do tipo $(0, 1)$ e do tipo $(1, 0)$ vão-se intercalando, isto é, se um intervalo k é do tipo $(0, 1)$, então o *intervalo aceitável* $k+1$ é do tipo $(1, 0)$, o *intervalo aceitável* $k+2$ é do tipo $(0, 1)$ e assim sucessivamente até ao último *intervalo aceitável*. Desta maneira o número de intervalos do tipo $(0, 1)$ é sempre mais 1 do que os do tipo $(1, 0)$. Denotando por p o número de intervalos do tipo $(0, 1)$ no intervalo I , consequentemente o número de intervalos do tipo $(1, 0)$ é $p-1$. Então, o número total de *intervalos aceitáveis* em I é dado por $p + (p-1) = 2p-1$ que é um número ímpar.

(q.e.d.)

Segundo lema de Sperner

Antes de apresentarmos o segundo lema de Sperner consideremos uma casa, subdividida em quartos (que neste caso serão retangulares mas como veremos

à frente a forma dos quartos é irrelevante) tal que cada quarto tenha 0, 1 ou 2 portas. Estas portas só podem ser de dois tipos:

- ★ porta exterior, que permite entrar e sair da casa;
- ★ porta de comunicação, que é comum a dois quartos.

Os quartos não podem ter mais do que uma porta exterior e dois quartos não podem ter mais que uma porta em comum. Por outro lado os quartos podem ter:

- ★ uma porta ou nenhuma porta e neste caso chamaremos *quarto sem saída*;
- ★ nunca mais do que duas portas; uma porta exterior e uma porta de comunicação.

Lema 2.4. O número de *quartos sem saída* e o número de quartos com porta exterior têm a mesma paridade.

Demonstração. A demonstração será feita imaginando que iremos caminhar ao longo dos vários quartos da casa. O sentido em que fazemos os caminhos ao longo dos quartos não interessa, ou seja irmos do quarto A para o quarto B é o mesmo caminho do que irmos de B para A. Esses caminhos deverão obedecer a dois princípios básicos:

- a) um caminho começa por uma porta exterior ou por um quarto sem saída e continua através de portas de comunicação, devendo terminar numa porta exterior ou num *quarto sem saída*;
- b) as portas só podem ser atravessadas uma vez.

A Figura 2.5 representa uma casa subdividida em quartos e indica um dos caminhos que se pode percorrer. Neste caso inicia-se por um quarto sem saída e termina-se numa porta exterior.

A restrição em relação ao número de portas em cada quarto, faz com que cada caminho seja único no sentido em que escolhido um ponto de início só existe uma possibilidade para terminar. Depois de terminado um caminho começamos outro e prosseguimos dessa maneira até que não restem mais portas exteriores ou quartos sem saída dos quais possamos iniciar. Assim, três tipos de caminhos podem ser percorridos, Figura 2.6:

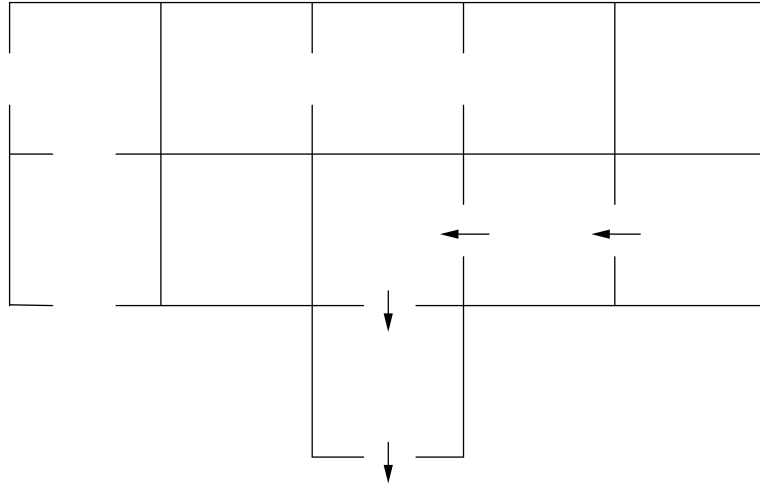


Figura 2.5: um caminho possível

- (1) começa numa porta exterior e termina numa porta exterior;
- (2) começa numa porta exterior e termina num *quarto sem saída*, ou vice-versa;
- (3) começa num *quarto sem saída* e termina num *quarto sem saída*.

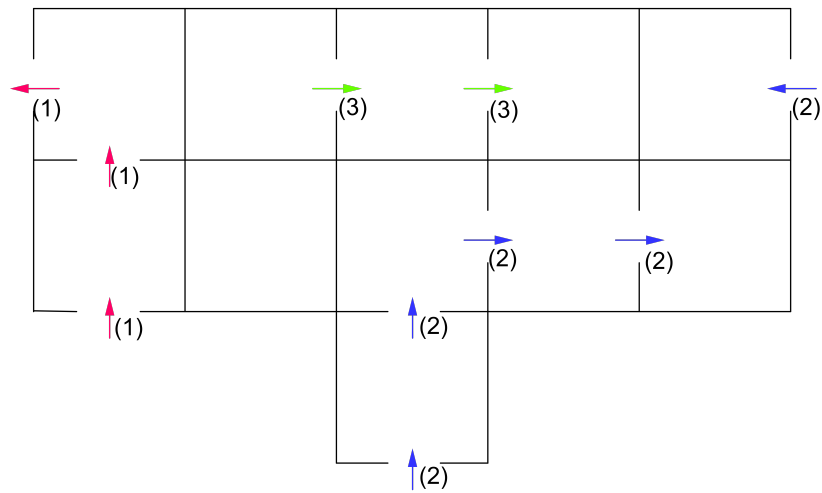


Figura 2.6: (1) exterior-exterior, (2) exterior-sem saída, (3) sem saída- sem saída

Denotemos por m , n e p respetivamente o número de caminhos do tipo (1), (2) e (3). Como o número de caminhos do tipo (1) corresponde a duas portas

exteriores e o do tipo (2) a uma porta exterior, o número de portas exteriores será $2m + n$. De maneira semelhante para os *quartos sem saída*, temos no caminho (2) um *quarto sem saída* e no caminho (3) dois *quartos sem saída*, logo o total de *quartos sem saída* é $n + 2p$. Como $2m + n$ e $2p + n$ têm a mesma paridade que será dada pelo número de caminhos do tipo (2). Concluimos então que o número de *quartos sem saída* e o número de portas exteriores têm a mesma paridade.

(q.e.d.)

Terceiro lema de Sperner

Este lema pode ser visto como uma variante do Lema 2.4 em que com os quartos têm a forma de triângulos.

Vamos definir o conceito de *triangulação* que irá ser necessário na demonstração deste lema.

Definição 2.2.1. Consideremos um triângulo T qualquer subdividido em pequenos triângulos t_i . Assumiremos que qualquer par de triângulos menores $t_i, t_j, i \neq j$ satisfaz uma e uma só das seguintes condições:

- i) t_i, t_j não têm pontos em comum;
- ii) t_i, t_j têm exatamente um vértice comum;
- iii) t_i, t_j têm exatamente um lado comum.

A esta divisão chamaremos *triangulação*, aos triângulos pequenos da subdivisão chamaremos *faces da triangulação*, aos lados dos triângulos pequenos chamaremos *arestas* e aos seus vértices chamaremos *vértices da triangulação*.
Figura 2.7.

Lema 2.5 (Sperner para um triângulo). Considere-se uma triangulação de um triângulo T . Atribuem-se aos vértices A, B e C desse triângulo, respectivamente, as etiquetas 1, 2 e 3. Os restantes vértices da triangulação serão etiquetados com um dos números 1, 2 ou 3 de modo a verificarem a seguinte condição: se o vértice estiver situado numa aresta de T será etiquetado com

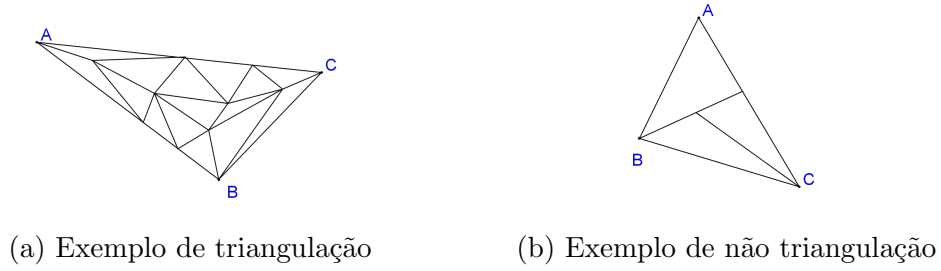


Figura 2.7

uma das etiquetas dos vértices dessa aresta, caso contrário poderá ter uma qualquer etiqueta 1, 2 ou 3. Então, existe pelo menos uma face com três etiquetas distintas, a que chamaremos *face completa* e, o número de tais faces completas é ímpar.

Demonstração. A Figura 2.8 ilustra o lema atrás enunciado.

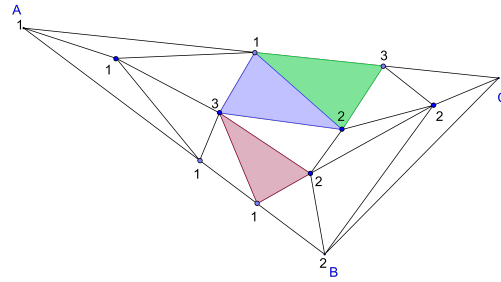


Figura 2.8: Lema de Sperner para um triângulo

Na demonstração deste lema vamos identificar algumas correspondências com o Lema 2.4. Chamaremos ao triângulo T a casa e, a cada face da triangulação quarto; se a face for completa passaremos a chamar *quarto sem saída*. Uma aresta da triangulação enumerada com etiquetas 1 e 2 é uma porta; se esta aresta pertencer a um dos lados do triângulo T é uma porta exterior. Resumindo:

As hipóteses de etiquetagem das faces são $\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 3\}, \{2, 2, 2\}, \{2, 2, 3\}, \{2, 3, 3\}, \{3, 3, 3\}$, logo uma face (um

triângulo T	casa
face da triangulação	quarto
face completa $\{1, 2, 3\}$	<i>quarto sem saída</i>
aresta etiquetada com $\{1, 2\}$	porta
aresta $\{1, 2\}$ num dos lados de T	porta exterior

Tabela 2.1: correspondências triângulo-casa

quarto) pode ter uma ou, duas arestas, ou nenhuma do tipo $\{1, 2\}$ (portas). Assim estamos nas condições do Lema (2.4). Concluimos assim que o número de *quartos sem saída*, faces do tipo $\{1, 2, 3\}$ e o número de portas exteriores, arestas do tipo $\{1, 2\}$ pertencentes aos lados de T , têm a mesma paridade. No entanto como as arestas do tipo $\{1, 2\}$ pertencentes aos lados de T , só poderão pertencer ao lado do triângulo que tem os vértices numerados com 1 e 2, podemos aplicar o Lema (2.3) e concluimos assim que o número arestas do tipo $\{1, 2\}$, pertencentes aos lados de T é ímpar e consequentemente o número de faces do tipo $\{1, 2, 3\}$ também é ímpar.

(q.e.d.)

Quarto lema de Sperner

Lema 2.6 (Sperner para um quadrado). Seja Q um quadrado que é dividido em quadrados mais pequenos (chamados faces) por linhas paralelas aos seus lados. Os vértices do quadrado Q são etiquetados com etiquetas 1, 2, 3 e 4. Os vértices da subdivisão são etiquetados com os mesmos números 1, 2, 3 ou 4 de modo que a seguinte condição de fronteira seja verificada: se um vértice da subdivisão pertence a uma aresta de Q é etiquetado por uma das duas etiquetas dadas aos vértices dessa aresta de Q . Então existe pelo menos uma face que tem três dos seus vértices numerados com etiquetas diferentes a que chamaremos *face completa*.

Demonstração. Iremos usar novamente o processo utilizado para demonstrar o

Lema 2.5, mas para isso é necessário termos uma triangulação. Subdividimos os quadrados mais pequenos em dois triângulos utilizando segmentos de reta paralelos apenas a uma das diagonais do quadrado Q .

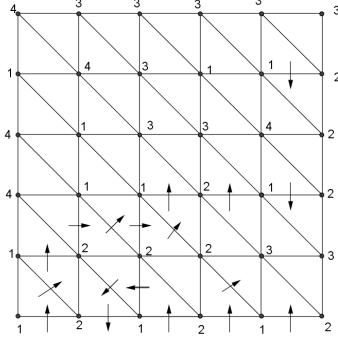


Figura 2.9: triangulação do quadrado

Assim temos o quadrado Q triangulado com todos os vértices rotulados por 1, 2, 3 ou 4, ver Figura 2.9. Na demonstração apenas precisamos de definir o que é uma porta e um *quarto sem saída*. As arestas da triangulação etiquetadas com $\{1, 2\}$ serão chamadas portas. Um *quarto sem saída* é uma face (subtriângulo) do tipo $\{1, 2, 3\}$ ou $\{1, 2, 4\}$. Pelas correspondências apresentadas na Tabela 2.1 todas as portas exteriores pertencem necessariamente à aresta de Q , cujas extremidades são rotuladas por 1 e 2. Pelo Lema 2.3 sabemos que o número de portas exteriores é ímpar. Qualquer caminho através das faces triangulares do quadrado, que começa por uma porta exterior termina necessariamente numa de duas maneiras: ou abandona o quadrado Q por uma porta exterior, ou termina num *quarto sem saída*, Figura 2.9. Como o número total de portas exteriores é ímpar, então pelo menos um caminho começa numa porta exterior e termina num *quarto sem saída*. Ou seja, existe pelo menos uma face etiquetada com $\{1, 2, 3\}$ ou $\{1, 2, 4\}$, e conseqüentemente existe pelo menos um subquadrado etiquetado com três etiquetas diferentes. Concluimos então a existência de pelo menos um subquadrado completo.

(q.e.d.)

2.2.2 Demonstração do teorema de Brouwer para $n = 2$

Teorema 2.7 (Brouwer num quadrado). Qualquer aplicação f (função) contínua do quadrado nele mesmo tem a propriedade do ponto fixo.

Demonstração. Consideremos um quadrado Q , dividido em quadrados mais pequenos por linhas paralelas às suas arestas, Figura 2.10.

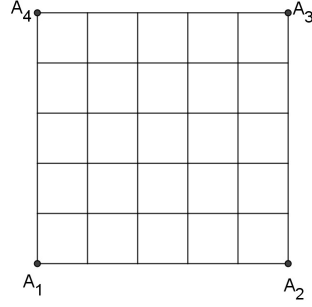


Figura 2.10: Subdivisão do quadrado

Se algum vértice da subdivisão permanece fixo quando transformado por f então o teorema está provado.

Suponhamos então que todos os vértices são deslocados. Vamos rotular cada vértice da subdivisão por 1, 2, 3 ou 4. Os rótulos são atribuídos consoante a direção do movimento de cada vértice e de modo que as condições do Lema 2.6 sejam satisfeitas. Mais precisamente, seja p um vértice da subdivisão e $q = f(p)$, seja \vec{pq} o vector deslocamento, Figura 2.11.

Seja ϕ o ângulo que esse vector forma com a direção positiva do eixo horizontal. O vértice p é rotulado de acordo com a Tabela 2.2.

Se o ponto p coincide com o vértice A_1 do quadrado Q , o ângulo ϕ satisfaz as desigualdades $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Quando se tem as desigualdades estritas $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, o vértice A_1 , segundo a Tabela 2.2, é rotulado com 1. No entanto se $\phi = 0$ ou $\phi = \frac{\pi}{2}$ o vértice pode ser rotulado com 1, 2, ou 4. Para satisfazermos as condições do Lema 2.6, escolhemos rotular com 1. Analogamente, os vértices A_2 , A_3 , A_4 são rotulados com 2, 3 e 4 respetivamente. Se o ponto p pertence ao lado $[A_1A_2]$ e não coincide com esses vértices, então $0 \leq \phi \leq \pi$. Se tivermos $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ será rotulado com 1 ou 2 respetivamente; se $\phi = 0$, p

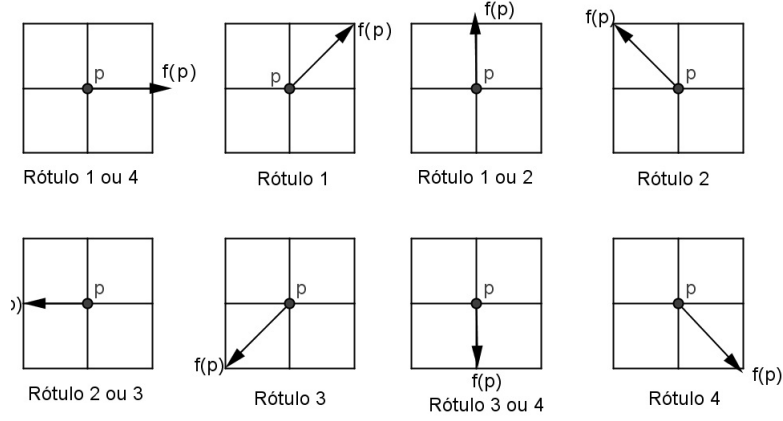


Figura 2.11: Rotulagem dos vértices

Ângulo	Rótulo
$\phi = 0$	1 ou 4
$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$	1
$\phi = \frac{\pi}{2}$	1 ou 2
$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$	2
$\phi = \pi$	2 ou 3
$\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$	3
$\phi = \frac{3\pi}{2}$	3 ou 4
$\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$	4

Tabela 2.2: Rotulagem dos vértices em função do ângulo ϕ

poderia ser rotulado com 1 ou 4, mas para estarmos nas condições do Lema 2.6 será rotulado com 1. Para $\phi = \frac{\pi}{2}$ ou $\phi = \pi$ usamos o mesmo raciocínio. Para o ponto p que pertence a um dos outros lados do quadrado Q procedemos na mesma linha que anteriormente. Para os pontos que estão dentro do quadrado Q , rotulamos p de acordo com a Tabela 2.2. Como todo este processo satisfaz as condições do Lema 2.6, temos que a subdivisão tem uma face com pelo menos três dos seus vértices rotulados com números diferentes.

Consideremos agora uma sucessão de decomposições $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots\}$ do quadrado Q . A n -ésima decomposição τ_n é construída da seguinte maneira:

cada lado de Q é dividido em 2^n partes iguais, a partir desses pontos construímos linhas paralelas aos lados. O comprimento das arestas da subdivisão τ_n tende para zero quando n tende para infinito. Suponhamos agora que todos os vértices da decomposição τ_n são deslocados por meio de f . Procedendo como acima concluímos que existe uma face em cada decomposição que tem pelo menos três dos seus vértices rotulados com números diferentes. Para cada decomposição τ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), seja Q_n tal face. Sejam x_n, y_n, z_n, u_n os seus vértices. Como o quadrado Q é um conjunto compacto, (ver Apêndice definição 7.2.9), existe uma subsucessão de $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ convergente para $p_0 \in Q$. Assumamos sem perda de generalidade que $\{x_n\}$ é essa subsucessão. Então existem mais três sucessões que convergem para o mesmo ponto, porque o comprimento dos lados de Q_n tende para zero quando n tende para infinito. Sejam elas, $\{y_n\}, \{z_n\}, \{u_n\}$.

Vamos então provar que p_0 é um ponto fixo. Admitindo que p_0 e $f(p_0) = q_0$ como $p_0 \neq q_0$ várias situações podem ocorrer:

i) a função f é tal que o ângulo ϕ formado pelo eixo positivo das abcissas e pela direção de $\overrightarrow{p_0 q_0}$ é igual a $\frac{\pi}{2}$. Neste caso desenhamos uma reta horizontal, L que separa p_0 de q_0 (ver Figura 2.12). Tome-se uma vizinhança- ϵ do ponto q_0 , $\mathcal{V}_\epsilon(q_0)$, que não intersete L .

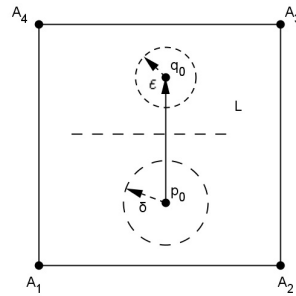


Figura 2.12: $\phi = \frac{\pi}{2}$

Como a função f é contínua no ponto p_0 , existe uma vizinhança- δ de p_0 , $\mathcal{V}_\delta(p_0)$, tal que as imagens de todos os pontos dessa vizinhança estão em $\mathcal{V}_\epsilon(q_0)$. Escolhemos δ suficientemente pequeno de modo que $\mathcal{V}_\delta(p_0)$ não intersete L , e por conseguinte não intersete $\mathcal{V}_\epsilon(q_0)$. Se $p \in \mathcal{V}_\delta(p_0)$ e $f(p) = q$ é a sua

imagem, então o ângulo ϕ , correspondente ao deslocamento do vector \overrightarrow{pq} , satisfaz $0 < \phi < \pi$. Por outro lado, para n muito grande, os vértices de x_n, y_n, z_n, u_n de Q_n pertencem a $\mathcal{V}_\delta(p_0)$ e o ângulo que lhes corresponde também está em $]0, \pi[$, por isso, só podem ser rotulados com 1 ou 2 (Tabela 2.2). Isto contraria o facto dos vértices de Q_n serem rotulados com pelo menos três números diferentes.

ii) a função f é tal que faz com que o ângulo ϕ formado pelo eixo positivo das abcissas e pela direção de $\overrightarrow{p_0q_0}$ é tal que $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$.

Desenham-se duas retas uma horizontal L_1 e outra vertical L_2 que separem p_0 e q_0 . Tomem-se as vizinhanças $\mathcal{V}_\delta(p_0)$ e $\mathcal{V}_\epsilon(q_0)$ que não intersetem nem L_1 nem L_2 , Figura 2.13.

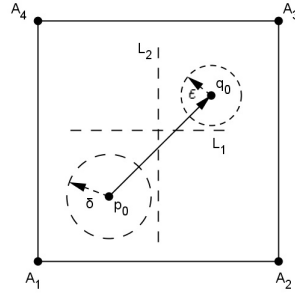


Figura 2.13: $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

Se $p \in \mathcal{V}_\delta(p_0)$ e $f(p) = q$, o ângulo ϕ correspondente a p satisfaz $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ pelo que será rotulado com o valor 1 (Tabela 2.2). Se considerarmos os vértices do quadrado Q_n para n suficientemente grande, voltamos a chegar a uma contradição.

Considerámos apenas os dois casos correspondentes às duas primeiras linhas da Tabela 2.2, mas com o mesmo tipo de argumento prova-se para os restantes valores de ϕ apresentados na tabela. Somos então levados a concluir que existe pelo menos um vértice que não verifica a desigualdade $p_0 \neq f(p_0)$, ou seja existe pelo menos um ponto p_0 no quadrado tal que $f(p_0) = p_0$. Provámos a existência de pelo menos um ponto fixo de f no quadrado. (q.e.d.)

2.3 Teorema de Leray-Schauder

Este teorema é equivalente ao teorema de Brouwer. Há aplicações contínuas em B^n cuja a imagem não está contida em B^n mas para os quais ainda é possível garantir a existência de ponto fixo. Um dos casos em que podemos garantir a existência de ponto fixo é quando a imagem de cada ponto x na fronteira de B^n não está na semirreta μx , $\mu > 1$. Mais geralmente temos o teorema de Leray-Schauder.

Teorema 2.8 (Leray-Schauder). Seja $f : B^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que:

$$f(x) \neq \mu x \quad \forall x \in \partial B^n, \mu > 1 \quad (2.7)$$

então f tem pelo menos um ponto fixo em B^n .

Por um lado o teorema do ponto fixo de Brouwer é consequência imediata do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder. Por outro lado se aplicarmos o Teorema de Brouwer à aplicação contínua $T^* : B^n \longrightarrow B^n$ definida da seguinte maneira:

$$T^*(x) = \begin{cases} T(x) & \text{se } \|T(x)\| \leq 1 \\ \frac{T(x)}{\|T(x)\|} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

todo o ponto fixo x^* de T^* é tal que $\|T^*(x)\| \leq 1$ e também é ponto fixo de T .

Capítulo 3

Teoremas relacionados com o teorema do ponto fixo de Brouwer

Consideremos $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Não faz sentido falarmos de pontos fixos de aplicações contínuas de S^1 em \mathbb{R} dado que S^1 não é um subconjunto de \mathbb{R} . No entanto essas aplicações têm uma propriedade interessante que descreveremos de seguida. O teorema que iremos apresentar, primeiro para dimensão 1 e depois para dimensão n , conhecido como o teorema de Borsuk-Ulam, foi conjecturado pelo matemático americano de origem polaca Stanislaw Ulam e posteriormente demonstrado pelo matemático polaco Karol Borsuk.

Neste capítulo iremos também introduzir o conceito de retração e contração.

Vamos enunciar e demonstrar o teorema da não-retração e ver que implica o teorema de Brouwer.

Iremos ainda enunciar e demonstrar um resultado 'poderoso' - o teorema da contração - que nos dá a existência e a unicidade de ponto fixo em funções com determinadas características.

Vamos apresentar alguns conceitos e definições necessárias no que se segue.

A posição de um ponto x na circunferência é usualmente descrita através do ângulo α formado pelo semi-eixo positivo das abcissas, e pela semirreta de

origem no centro da circunferência e que passa por x . Ao ângulo α chama-se *coordenada angular* de x , ver Figura 3.1.

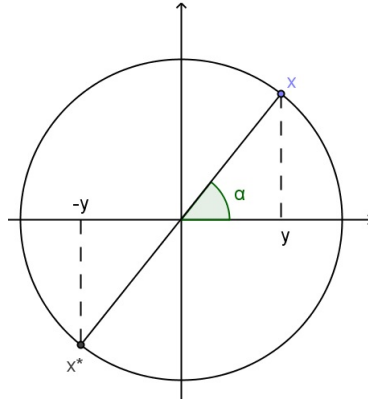


Figura 3.1: coordenada angular

Definição 3.0.1. Dois pontos x e $x^* \in S^1$, dizem-se *antípodas*, se as suas coordenadas angulares diferem de π .

O sentido direto é considerado o sentido positivo. Suponhamos ainda que o valor de α é dado em radianos e que $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Mais geralmente dados dois pontos x e x^* numa n -esfera dizem-se *antípodas* se $x^* = -x$ (diametralmente opostos).

Iremos enunciar o teorema de Borsuk-Ulam e de seguida apresentamos a demonstração para $n = 1$. Estamos agora em condições de enunciar e provar o teorema de Borsuk-Ulam para $n = 1$.

Teorema 3.1 (Borsuk-Ulam). Seja $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Então existe um par de pontos antípodas x e x^* , tais que $f(x) = f(x^*)$.

O equivalente para $n = 1$ é:

Teorema 3.2 (Borsuk-Ulam para $n = 1$). Seja $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua definida numa circunferência. Então existe um par de pontos antípodas x e x^* , tais que $f(x) = f(x^*)$.

Este teorema é uma consequência imediata do teorema do valor intermédio e, consequentemente do teorema de Brouwer.

Demonstração. Seja S^1 a circunferência de centro na origem e raio unitário e seja α a coordenada angular de x , ver Figura 3.1. Defina-se uma função g , no intervalo fechado $I = [-1, 1]$ da seguinte maneira: para cada $y \in I$ faz-se corresponder o ponto x que é a interseção da parte superior da circunferência com a perpendicular ao eixo das abcissas passando por y ; seja x^* o antípoda de x . Considere-se a função

$$g(y) = f(x) - f(x^*) = f(\alpha) - f(\alpha \pm \pi) \quad (3.1)$$

onde α é a *coordenada angular* de x .

Os valores da função g nos extremos do intervalo são:

$$g(1) = f(0) - f(\pi) \text{ e } g(-1) = f(\pi) - f(0). \text{ Ou seja } g(1) = -g(-1).$$

Se $g(1) = 0$ o teorema está provado.

Caso contrário o teorema do valor intermédio implica que existe um ponto y_0 no intervalo fechado I , tal que $g(y_0) = 0$ e portanto existe um $x_0 \in S^1$, tal que

$$f(x_0) - f(x_0^*) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(x_0^*) \quad (\text{q.e.d.})$$

Em 1997 Francis Edward Su provou que o teorema de Borsuk-Ulam implica o teorema de Brouwer ([16]).

Antes de passarmos a outro teorema de ponto fixo vejamos o que se passa com aplicações contínuas de S^1 em si mesmo. Nem sempre estas aplicações admitem pontos fixos. Por exemplo, a aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$, que é a rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em sentido direto, ou seja $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ não tem pontos fixos, o que não contraria o teorema de Brouwer porque S^1 não é homeomorfo a B^2 . Também não existem pontos antípodas com a mesma imagem.

Vejamos se existe um ponto $(x_1, x_2) \in S^1$ que seja ponto fixo de f :

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \Leftrightarrow (-x_2, x_1) = (x_1, x_2) \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \wedge x_1 = x_2, \text{ ou seja } (x_1, x_2) = (0, 0) \notin S^1.$$

Também não existem em S^1 dois pontos antípodas com a mesma imagem. Admitindo que existem pontos (x_1, x_2) e (x_1^*, x_2^*) tais que :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = f(x_1^*, x_2^*) &\Leftrightarrow f(x_1, x_2) = f(x_1 + \pi, x_2 + \pi) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-x_2, x_1) = (-x_2 - \pi, x_1 + \pi) \Leftrightarrow -x_2 = -x_2 - \pi \wedge x_1 = x_1 + \pi \end{aligned}$$

o que é impossível.

Vamos agora enunciar e demonstrar outro teorema que está intimamente ligado à ideia de ponto fixo. Na base deste teorema está o conceito de retração que iremos definir em seguida.

Definição 3.0.2. Seja X um conjunto e $r : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua com $Y \subseteq X$. A aplicação r diz-se uma *retração* sse $r(y) = y$ para todo o $y \in Y$. Neste caso dizemos que Y é um *retrato* de X .

Uma *retração* colapsa continuamente o conjunto X em Y , mantendo fixos todos os pontos de Y ver Figura 3.2.

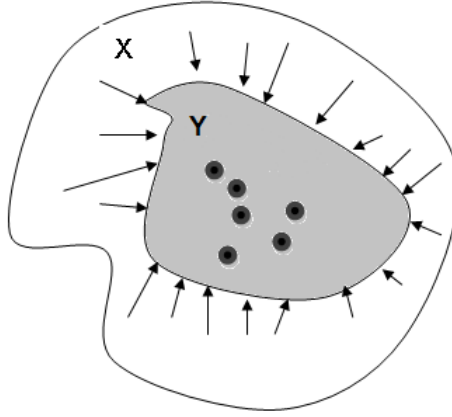


Figura 3.2: Retração

Exemplo 3.1. Sejam $X = \mathbb{R}^n$, $R > 0$ e $Y = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$. Então Y é um *retrato* de X . A *retração* é dada por:

$$s(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x\| \leq R \\ \frac{Rx}{\|x\|} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O teorema que apresentamos de seguida foi provado por Borsuk em 1931.

Teorema 3.3 (da não-retração). Não existe uma função contínua

$$r : B^n \longrightarrow \partial B^n, \text{ tal que } r(x) = x \text{ para todo o } x \in \partial B^n.$$

Demonstração. Vamos admitir por absurdo que existe uma aplicação contínua de B^n em ∂B^n tal que $r(x) = x$ para todo $x \in \partial B^n$.

Consideremos a aplicação contínua $-r : B^n \longrightarrow \partial B^n \subset B^n$. Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, a aplicação $-r$ tem um ponto fixo $x^* \in \partial B^n$. Então, $x^* = -r(x^*) = -x^*$ o que implica que $x^* = 0$ o que é absurdo já que $x^* \in \partial B^n$.

(q.e.d.)

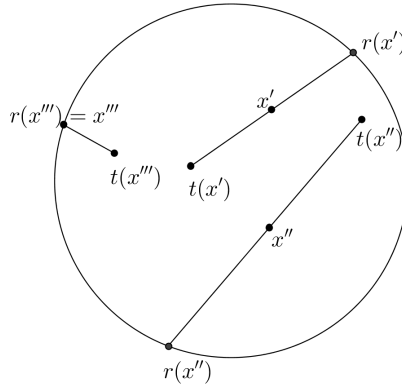


Figura 3.3: Retração impossível

Veremos agora que o teorema da não-retração implica o teorema de Brouwer.

Teorema 3.4. O teorema da não-retração implica o teorema de Brouwer.

Demonstração. Consideremos a aplicação $t : B^n \longrightarrow B^n$ contínua e admitamos que não tem ponto fixo, ou seja que $t(x) \neq x$ para todo $x \in B^n$. Definamos uma nova aplicação $r : B^n \longrightarrow \partial B^n$ também contínua, de modo que para cada $x \in B^n$ $r(x)$ é a interseção de ∂B^n com o prolongamento do segmento com início em $t(x)$ e término em x . Ver Figura 3.3.

Se $x \in \partial B^n$, $r(x) = x$. Então, r é uma retração o que pelo teorema (3.3) é impossível. Logo $t : B^n \longrightarrow B^n$ tem pelo menos um ponto fixo. (q.e.d.)

Do ponto de vista topológico o teorema da não-retração é equivalente ao teorema do ponto fixo de Brouwer.

Muitas vezes além de querermos saber se uma aplicação admite ou não pontos fixos pode ser conveniente caso exista ponto fixo saber se ele é ou não único. Esse resultado é-nos dado pelo teorema da contração. Antes de enunciarmos o teorema temos que definir contração e sucessão de iteradas.

Definição 3.0.3 (Contração). Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ é uma *contração*, se existe $\alpha \in]0, 1[$ tal que

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \alpha \| x - y \|, \forall x, y \in X$$

Definição 3.0.4 (Sucessão de iteradas). Dada uma aplicação, $f : X \longrightarrow X$, e um ponto inicial $x_0 \in X$. A sucessão

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0) \\ &\dots \\ x_n &= f^n(x_0) \end{aligned}$$

diz-se a *sucessão das iteradas de x_0* pela aplicação f .

Teorema 3.5 (da Contração). Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado e $f : X \longrightarrow X$ uma contração. Então:

1. Existe um único ponto fixo $x^* \in X$ tal que $x^* = f(x^*)$.
2. $\forall x_0 \in X$, a sucessão de iteradas, $x_n = f^n(x_0)$, converge para o ponto fixo x^* , ou seja

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$$

Demonstração. Unicidade

Supondo que temos dois pontos fixos,

$$\exists \quad x^*, y^* \in X : f(x^*) = x^* \text{ e } f(y^*) = y^*$$

Como f é uma contração temos:

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\| &= \|f(x^*) - f(y^*)\| \leq \alpha \|x^* - y^*\| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \alpha) \|x^* - y^*\| \leq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pela definição de contração 3.0.3 sabemos que $(1 - \alpha) > 0$, portanto de (3.2), temos que $\|x^* - y^*\| = 0 \Rightarrow x^* = y^*$.

Supondo que $x_n = f^n(x_0)$ converge, seja $z^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Dado que X é um conjunto fechado $z^* \in X$. Então:

$$\begin{aligned} z^* &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(f^{n-1}(x_0)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{n-1}) = f(z^*) \end{aligned}$$

Ou seja o limite da sucessão de iteradas $\{x_n\}$, é o ponto fixo.

Falta provar que realmente a sucessão de iteradas $\{x_n\}$, é convergente.

Seja $x_n = f(x_{n-1})$

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \alpha \|x_1 - x_0\| \\ \|x_3 - x_2\| &= \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \alpha^2 \|x_1 - x_0\| \\ \|x_4 - x_3\| &= \|f(x_3) - f(x_2)\| \leq \alpha^3 \|x_1 - x_0\| \\ &\dots \\ \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \alpha^n \|x_1 - x_0\| \end{aligned} \quad (3.3)$$

Seja $m = n + k$. Pela desigualdade triangular tem-se

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ \|x_m - x_n\| &\stackrel{(3.3)}{\leq} (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{m-1}) \|x_1 - x_0\| \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por outro lado

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+k-1} \Leftrightarrow \alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1}) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \quad (3.5)$$

De (3.3) e (3.5) temos:

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|$$

O lado direito da desigualdade anterior tende para zero, por isso a sucessão de iteradas $\{x_n\}$ é uma sucessão de Cauchy (ver Apêndice definição 7.2.3), logo é convergente. (q.e.d.)

Capítulo 4

Grau topológico de uma aplicação

Neste capítulo vamos demonstrar o teorema de Brouwer usando o grau topológico de uma aplicação. Começaremos por definir e apresentar algumas propriedades do grau topológico.

Será ainda definido o índice de ponto fixo porque é recorrendo a este conceito que demonstraremos um outro teorema, o teorema da 'esfera cabeluda'.

4.1 Grau de uma aplicação em \mathbb{R}

Escolhemos começar com a definição do grau de uma aplicação em \mathbb{R} por ser mais fácil e para motivar o que é feito para \mathbb{R}^n .

Seja $F : \overline{G} = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação continuamente diferenciável, tal que $F(a) \neq 0$ e $F(b) \neq 0$. Vamos supor que os zeros de F , se existirem, são em número finito x_1, x_2, \dots, x_m e além disso que todas as pré-imagens dos zeros de F são valores regulares, ou seja $F'(x_i) \neq 0$, para todo o $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

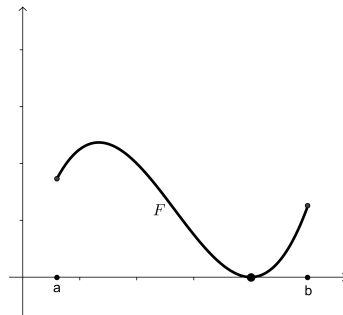
Definição 4.1.1. *O grau topológico de F em G é dado por*

$$\deg(F, G) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(F'(x_i))$$

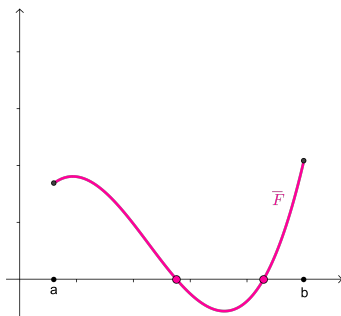
Vejamos o que fazer caso a aplicação F tenha algum zero degenerado, ver Figura 4.1a. Vamos considerar uma nova aplicação \bar{F} que não é mais do que uma pequena transformação da aplicação F e que verifica as seguintes condições:

(i)- a aplicação \bar{F} é continuamente diferenciável em $[a, b]$ e tal como F não tem zeros nos extremos do intervalo. Mais precisamente vamos supor que $\sup \| \bar{F}(x) - F(x) \| < \inf \| F(x) \|$ $x \in \partial G$. \bar{F} é obtida por deformação de F sem passar por zeros nos extremos do intervalo ao longo da deformação de F .

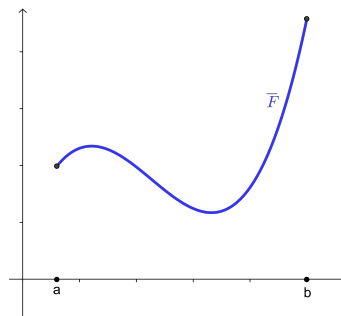
(ii)- No interior de $[a, b]$ se a aplicação \bar{F} tiver zeros eles serão em número finito, x_1, x_2, \dots, x_m e regulares.



(a) Aplicação contínua em $[a, b]$ com um zero degenerado.



(b) \bar{F} transformação da aplicação F sem zeros degenerados



(c) \bar{F} transformação da aplicação F sem zeros

Figura 4.1: Aplicação F com valores de zero não regulares

Duas coisas podem acontecer: ou a aplicação \bar{F} tem zeros em $]a, b[$ (ver Figura 4.1b), ou não tem zeros em $]a, b[$ (ver Figura 4.1c).

Pela definição 4.1.1 temos que $\deg(\overline{F}, G) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(\overline{F}'(x_i))$. Damos a seguinte definição:

Definição 4.1.2. Seja $F : G = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação continuamente diferenciável, tal que $F(a) \neq 0$ e $F(b) \neq 0$. Então

$$\deg(F, G) = \deg(\overline{F}, G)$$

Se \overline{F} não tem zeros em $[a, b]$ temos que $\deg(\overline{F}, G) = 0$. Se chamarmos *índice do zero* x_i a $\operatorname{sgn}(\overline{F}'(x_i))$, então $\deg(\overline{F}, G)$ é igual à soma dos índices dos zeros de \overline{F} em G .

Prova-se que a definição está bem dada no sentido que qualquer que seja a função \overline{F} que satisfaça (i) e (ii) o valor de $\deg(\overline{F}, G)$ é o mesmo.

Iremos agora apresentar uns exemplos onde damos várias aproximações \overline{F} para a função F .

Exemplo 4.1. Seja $F(x) = x^3$, $x \in \overline{G} = [-1, 1]$. Como $F'(0) = 0$, F tem um zero degenerado em $x = 0$. Vamos escolher $\overline{F}(x) = x^3 - \varepsilon$, com $\varepsilon \neq 0$ e $|\varepsilon| < 1$. Então \overline{F} tem um zero regular $x_1 = \sqrt[3]{\varepsilon}$ e $\overline{F}'(x_1) > 0$ vem $\deg(F, G) = 1$.

Exemplo 4.2. Seja $F(x) = x^2$, $x \in G = [-1, 1]$. Como $F'(0) = 0$, F tem um zero degenerado em $x = 0$. Vamos escolher $\overline{F}(x) = x^2 - \varepsilon$, $\varepsilon \neq 0$ e $|\varepsilon| < 1$. Podemos ter duas situações:

- i) se $-1 < \varepsilon < 0$ a aplicação $\overline{F}(x)$ não tem zeros e então $\deg(F, G) = 0$;
- ii) se $0 < \varepsilon < 1$ a aplicação $\overline{F}(x)$ tem dois zeros $x_1 = \sqrt{\varepsilon}$ e $x_2 = -\sqrt{\varepsilon}$, com $\overline{F}'(x_1) > 0$ e $\overline{F}'(x_2) < 0$, de onde obtemos $\deg(F, G) = \sum_{i=1}^2 \operatorname{sgn}(\overline{F}'(x_i)) = 0$.

Os exemplos apresentados também motivam a seguinte proposição:

Proposição 4.1.1. Seja $F : \overline{G} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e sem zeros nos extremos do intervalo G , com $G =]a, b[$ então:

$$\deg(F, G) = \begin{cases} 0 & \text{se } F(a)F(b) > 0 \\ 1 & \text{se } F(a) < 0 \text{ e } F(b) > 0 \\ -1 & \text{se } F(a) > 0 \text{ e } F(b) < 0 \end{cases}$$

Pelo teorema do valor intermédio temos que se $\deg(F, G) \neq 0$ a equação $F(x) = 0$ tem solução em G . Verificamos também que $\deg(F, G)$ depende apenas dos valores de F na fronteira de G , sendo este facto uma importante propriedade do grau de uma aplicação.

4.2 Grau de uma aplicação em \mathbb{R}^n

Para um dado ponto $y \in \mathbb{R}^n$ e G um aberto limitado de \mathbb{R}^n vamos definir $\deg(F, G, y)$ de forma a que se

$$\deg(F, G, y) \neq 0 \text{ então existe } x \in \overline{G} : F(x) = y.$$

Quando $y = 0$ escrevemos simplesmente $\deg(F, G)$.

Seguindo a mesma abordagem que usámos para \mathbb{R} temos:

Definição 4.2.1. Seja $F : \overline{G} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação.

Considere-se $\overline{F} : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verificando as seguintes condições:

- i) \overline{F} é continuamente diferenciável em \overline{G} , sem zeros na fronteira de \overline{G} ;
- ii) se \overline{F} tiver zeros em G eles serão em número finito x_1, x_2, \dots, x_m e regulares;
- iii) F e \overline{F} verificam a seguinte desigualdade

$$\sup \| \overline{F}(x) - F(x) \| < \inf \| F(x) - y \|, x \in \partial G.$$

Então:

$$\deg(F, G, y) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} \left(\det \overline{F}'(x_i) \right) \quad (4.1)$$

Se $G = \emptyset$ definimos $\deg(F, G, y) = 0$.

A definição apresentada em (4.1.1) é independente da aproximação \overline{F} .

Relembramos que os pontos fixos de uma aplicação F são os zeros de

$F(x) - x$. Como vimos na secção anterior, em \mathbb{R} $\deg(F, G) \neq 0$ implica a existência de um zero de F em G . Analogamente se $F : \overline{G} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é

tal que $\deg(F, G) \neq 0$ então existe um zero de F em G . Como consequência destas considerações podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 4.2.2. Seja $f : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos *índice do ponto fixo*, $i(f, G)$, da aplicação f em G como

$$i(f, G) = \deg(I - f, G, 0).$$

Definição 4.2.3. Seja $V(G, \mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as aplicações f tais que:

- i) $f : \overline{G} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua;
- ii) f não tem pontos fixos na fronteira de G .

Definição 4.2.4. Duas aplicações $f, g \in V(G, \mathbb{R}^n)$ dizem-se *continuamente homotópicas* na fronteira de G sse existir uma aplicação H com as seguintes propriedades:

- i) $H : \overline{G} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua;
- ii) $H(x, t) \neq x$ para todo o $(x, t) \in \partial G \times [0, 1]$;
- iii) $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ em \overline{G} .

Escrevemos $\partial G : f \cong g$ e a aplicação H diz-se uma *homotopia*.

Proposição 4.2.1. As aplicações na classe $V(G, \mathbb{R}^n)$ e as homotopias verificam as seguintes propriedades:

- (1) se $f \in V(G, \mathbb{R}^n)$ então $\inf_{x \in \partial G} \|f(x) - x\| > 0$;
- (2) o conjunto dos pontos fixos de f em $V(G, \mathbb{R}^n)$ é compacto;
- (3) a relação $\partial G : f \cong g$ é uma relação de equivalência;
- (4) a relação $\partial G : f \cong g$ é verdadeira se $f, g \in V(G, \mathbb{R}^n)$ e

$$\sup_{x \in \partial G} \|f(x) - g(x)\| < \inf_{x \in \partial G} \|f(x) - x\|$$

- (5) para cada homotopia H existe uma constante a tal que:

$$\|H(x, t) - x\| \geq a > 0 \quad \text{para todo } (x, t) \in \partial G \times [0, 1]$$

O *índice de ponto fixo* verifica as seguintes propriedades:

Propriedade 4.2.1. (Normalização) Seja $x_0 \in G$ fixado e $f(x) = x_0$ para todo $x \in \overline{G}$, então $i(f, G) = 1$.

Propriedade 4.2.2. (Princípio de existência de Kronecker) Se $i(f, G) \neq 0$, então existe $x \in G$ tal que $f(x) = x$.

Propriedade 4.2.3. (Aditividade) Temos $i(f, G) = \sum_{j=1}^v i(f, G_j)$ sempre que $f \in V(G, \mathbb{R}^n)$ e $f \in V(G_j, \mathbb{R}^n)$ para todo o $j = 1, \dots, v$, onde $\{G_j\}$ é uma partição de G .

Propriedade 4.2.4. (Invariância da homotopia) Se $\partial G : f \cong g$, então $i(f, G) = i(g, G)$.

Analogamente às propriedades do *índice de ponto fixo* temos que:

Propriedade 4.2.5. $\deg(F, G) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in G : f(x) = 0$.

Propriedade 4.2.6. $\deg(I, \text{int}(B^n)) = 1$.

Propriedade 4.2.7. Considerando a homotopia $H : \overline{G} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$H(x, t) \neq y, \quad \forall t \in [0, 1];$$

$$H(x, 0) = f(x);$$

$$H(x, 1) = g(x).$$

Se $\partial G : f \cong g$, então $\deg(f, G) = \deg(g, G)$.

4.3 Demonstração do teorema de Brouwer utilizando o grau topológico

Seja $f : B^n \longrightarrow B^n$ uma aplicação contínua. Se f tem um ponto fixo na fronteira de B^n , S^{n-1} , o teorema está provado.

Consideremos as seguintes aplicações:

$$H : B^n \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ e } g : B^n,$$

definidas por $H(x, t) = tf(x)$ e $g(x) = 0$. $\text{int}(B^n) : f \cong g$ e pela Propriedade 4.2.4 temos $i(f, \text{int}(B^n)) = i(g, \text{int}(B^n))$. Por outro lado, pela propriedade 4.2.1, $i(g, \text{int}(B^n)) = 1$ o que implica $i(f, \text{int}(B^n)) = 1$. Pela propriedade 4.2.2 concluímos então que f tem pelo menos um ponto fixo.

4.4 Teorema da esfera cabeluda

O teorema apresentado nesta secção deve-se em grande parte ao trabalho de Henri Poincaré (ver Secção 7.1.12). Poincaré provou este teorema para dimensão $n = 2$ e em 1912 Brouwer provou para o caso geral.

Qualquer que seja n a superfície esférica S^n tem um campo contínuo de vetores normais e unitários. Vamos ver o que se passa com campos vectoriais tangentes (ver Definição 7.2.10).

Teorema 4.1 (da esfera cabeluda). S^n admite um campo contínuo de vetores unitários tangentes não nulos em todos os pontos sse n for ímpar.

Demonstração. Para $n = 1$, o campo $V(x) = (-x_2, x_1)$ é contínuo, unitário e tangente a S^1 .

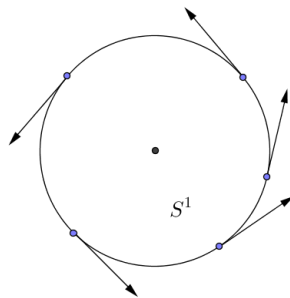


Figura 4.2: Campo de vetores unitários tangentes a S^1

Mais geralmente se n é ímpar ou seja se $n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}$ podemos sempre arranjar um campo de vetores contínuo e unitário definido por:

$$V(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2m}, x_{2m-1})$$

que é tangente a S^{n-1} já que $\langle x, V(x) \rangle = 0$.

Suponhamos agora que para n par ($n = 2m$) existe um campo de vetores V contínuo não nulo tangente a S^{n-1} , então $\langle x, V(x) \rangle = 0$. Pelo teorema de Tietze (ver Apêndice Secção 7.1.14 e Teorema 7.2) podemos considerar a extensão de $V(x)$ a toda a bola.

Definamos a homotopia $H : B^n \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$H(x, t) = x \cos(\pi t) + \frac{V(x)}{\|V(x)\|} \sin(\pi t), \quad t \in [0, 1]$$

Temos

$$H(x, 0) = x = f(x), \quad H(x, 1) = -x = g(x) \quad \text{e} \quad \|H(x, t)\| = 1 \quad \text{para todo o } x \in S^n$$

Sabemos que $\deg(f, \text{int}(B^n)) = 1$ pela propriedade 4.2.6, pela definição de grau de uma aplicação

$$\deg(g, \text{int}(B^n)) = \sum \text{sgn} \det(-I) = \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \right| = (-1)^{n+1} = -1$$

Como $f \cong g$ sabemos pela propriedade 4.2.7 que $\deg(f, \text{int}(B^n)) = \deg(g, \text{int}(B^n))$ o que nos leva a uma contradição. (q.e.d.)

Capítulo 5

A surpresa da dimensão infinita

Nos capítulos anteriores deste trabalho os assuntos apresentados foram sempre em espaços de dimensão finita, é natural que nos questionemos o que se passará com alguns dos resultados se estivermos a trabalhar em dimensão infinita.

Vamos então considerar a generalização mais natural do espaço euclidiano:

$$\ell^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots), \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$$

munida de uma norma e de um produto escalar definidos por:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}, \quad \langle x, x' \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot x'_k$$

Definimos também de uma forma natural a bola e a esfera unitária por:

$$B^\infty = \{x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1\}, \quad S^\infty = \{x \in \ell^2 : \|x\| = 1\}$$

Como sabemos o infinito é fértil em surpresas, por isso comecemos por ver o que se passa com o equivalente ao teorema de Brouwer para $n = \infty$.

Consideremos a aplicação contínua $T : B^\infty \longrightarrow B^\infty$ definida por

$$T(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots \right).$$

Admitamos que $x^* \in B^\infty$ é ponto fixo de T ,

$$T(x^*) = x^* \Leftrightarrow T(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots) \quad (5.1)$$

Se se verificar (5.1), temos:

$$\|x^*\| = \|T(x^*)\| = \sqrt{1 - \|x^*\|^2 + \|x^*\|^2} = 1. \quad (5.2)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 - \|x^*\|^2}, x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots\right) &= (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots) \stackrel{(5.2)}{\Leftrightarrow} \\ (0, x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots) &= (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots) \Leftrightarrow x_1^* = 0 = x_2^* = x_3^* = \dots = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

De (5.2) e de (5.3) chegamos a uma contradição. Então a aplicação contínua $T : B^\infty \longrightarrow B^\infty$ não tem pontos fixos.

Um outro teorema estudado neste trabalho foi o teorema da não-retração, vejamos o que acontece quando estamos a trabalhar em dimensão infinita.

Seja T definida com anteriormente e consideremos a aplicação R definida em B^∞ por:

$$R(x) = \frac{(\|x\|^2 - 1)T(x) + 2(1 - \langle x, T(x) \rangle)x}{\|x\|^2 - 2\langle x, T(x) \rangle + 1}$$

Para $x \in S^\infty \subset B^\infty$ temos $R(x) = \frac{2(1 - \langle x, T(x) \rangle)x}{1 - 2\langle x, T(x) \rangle + 1} = x$, logo S^∞ é um retrato de B^∞ .

Capítulo 6

Aplicações dos teoremas apresentados

Neste capítulo iremos apresentar algumas aplicações e exemplos que ajudam a ilustrar os teoremas apresentados. Começaremos com uma aplicação prática do teorema de Brouwer para estudar a existência ou não da solução de um sistema de equações; de seguida iremos mostrar aplicando ainda o teorema de Brouwer e o teorema da contração a existência de um triângulo dadas as medidas das suas bissetrizes internas. Uma aplicação direta do teorema de Borsuk-Ulam será ilustrada na Secção 6.3; nas duas secções seguintes serão apresentadas aplicações deste teorema em dimensão 2 e em dimensão 3 respetivamente. Nas duas últimas secções ilustraremos o teorema da não-retração e o teorema da esfera cabeluda.

6.1 Uma aplicação algébrica

Tem solução o seguinte sistema de equações?

$$\begin{cases} x - \frac{x + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} - 5 = 0 \\ y - \sin(xy) + 3 = 0 \end{cases}$$

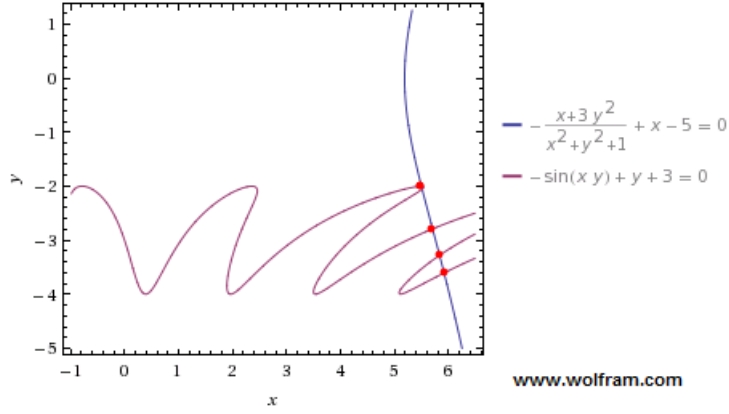


Figura 6.1: Solução gráfica do sistema

Utilizando um meio computacional vemos imediatamente que o sistema tem solução (Figura 6.1). Tentemos demonstrar teoricamente. Para isso consideremos a função $T(x, y) = \left(\frac{x + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} + 5, \sin(xy) - 3 \right)$.

Tendo em conta que:

$$\left| \frac{x + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} + 5 \right| \leq 5 + \left| \frac{x + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} \right| \leq 5 + \frac{|x| + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} \quad (6.1)$$

Uma vez que $(|x| - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{x^2 + 1}{2}$, de (6.1) obtemos:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} + 5 \right| \leq 5 + \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left| \frac{x + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} + 5 \right| \leq 5 + \frac{3x^2 + 3 + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left| \frac{x + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} + 5 \right| \leq 8 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Por outro lado

$$|\sin(xy) - 3| \leq 4 \quad (6.3)$$

Por (6.2) e (6.3) obtemos então que

$$\begin{aligned} \|T(x, y)\| &= \sqrt{\left(\frac{x + 3y^2}{x^2 + y^2 + 1} + 5\right)^2 + (\sin(xy) - 3)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{8^2 + 4^2} \leq \sqrt{80} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Concluimos então que para qualquer raio $R \geq \sqrt{80}$, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ verifica $T(B|_R) \subseteq B|_R$. Dado que T é contínua concluimos pelo teorema do ponto fixo de Brouwer que T tem pelo menos um ponto fixo, ou seja

$$T(x, y) = (x, y), \text{ com } x^2 + y^2 \leq R^2$$

e consequentemente o sistema apresentado tem pelo menos uma solução.

6.2 Uma aplicação geométrica

Dados quaisquer três números positivos m , n e p , existe um triângulo cujos comprimentos das bissetrizes internas seja m , n e p ?

Passaremos a chamar bissetriz interna de um triângulo, ao segmento de reta que parte de um vértice, e vai até o lado oposto do vértice de que partiu, dividindo o ângulo correspondente em dois ângulos congruentes.

Iremos precisar de algumas fórmulas. Sejam a, b, c as medidas dos lados de um triângulo e m, n, p as medidas das bissetrizes e s o semi-perímetro. Temos:

$$m = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)} \quad (6.5)$$

$$n = \frac{2}{a+c} \sqrt{acs(s-b)} \quad (6.6)$$

$$p = \frac{2}{a+b} \sqrt{abs(s-c)} \quad (6.7)$$

Vamos provar que se verifica (6.5) e de maneira semelhante se podem concluir (6.6) e (6.7).

Consideremos o triângulo representado na Figura 6.2.

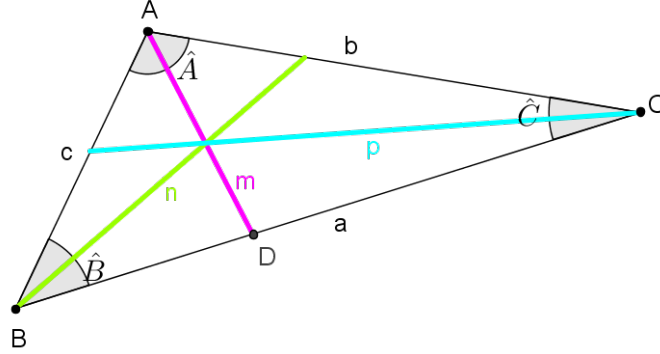


Figura 6.2: Bissetrizes internas do triângulo

Se $S(ABC)$ denota a área do triângulo ABC , e aplicando a área de um triângulo dada em função do seno de um dos ângulos internos do triângulo (ver Apêndice Proposição 7.2.3) temos:

$$\begin{aligned}
 2S(ABC) &= 2S(ABD) + 2S(ADC) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow bc \sin(\hat{A}) = cm \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + bm \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow bc \sin(\hat{A}) = m \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) (b + c) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow m = \frac{bc \sin(\hat{A})}{(b + c) \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} \Leftrightarrow m = \frac{bc}{b + c} \frac{2 \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow m = \frac{2bc}{b + c} \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \Leftrightarrow m = \frac{2bc}{b + c} \sqrt{\frac{\cos(\hat{A}) + 1}{2}} \stackrel{(7.2.4)}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow m = \frac{2bc}{b + c} \left(\sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1} \right) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow m &= \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4bc}} \Leftrightarrow m = \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow m &= \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} \Leftrightarrow m = \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{s(b+c-a)}{2bc}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow m &= \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{s(b+c+a-2a)}{2bc}} \Leftrightarrow m = \frac{2bc}{b+c} \sqrt{s \left(\frac{b+c+a}{2bc} - \frac{a}{bc} \right)} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow m &= \frac{2}{b+c} \sqrt{b^2 c^2 s \left(\frac{s}{bc} - \frac{a}{bc} \right)} \Leftrightarrow m = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)}
\end{aligned}$$

Fica desta forma demonstrada (6.5).

Utilizando (6.5), (6.6) e (6.7) verificamos que:

$$\begin{aligned}
4m^2 + [a \pm (b-c)]^2 &= 4 \times \frac{4}{(b+c)^2} \times bc \times \frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) + [a \pm (b-c)]^2 = \\
&= \frac{4bc}{(b+c)^2} (a+b+c)(b+c-a) + [a \pm (b-c)]^2 = \\
&= \frac{4bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} + [a \pm (b-c)]^2 = \\
&= 4bc \left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right] + a^2 \pm 2a(b-c) + (b-c)^2 = \\
&= 4bc - \frac{4a^2 bc}{(b+c)^2} + a^2 \pm 2a(b-c) + (b-c)^2 = \\
&= (b+c)^2 - \frac{4a^2 bc}{(b+c)^2} + a^2 \pm 2a(b-c) = \\
&= (b+c)^2 \pm 2a(b-c) + \frac{a^2(b+c)^2 - 4a^2 bc}{(b+c)^2} = \\
&= (b+c)^2 \pm 2a(b-c) + \frac{a^2[(b+c)^2 - 4bc]}{(b+c)^2} = \\
&= (b+c)^2 \pm 2a(b-c) + \frac{a^2(b-c)^2}{(b+c)^2} = \\
&= \left[b+c \pm \frac{a(b-c)}{b+c} \right]^2
\end{aligned}$$

Ou seja

$$4m^2 + [a \pm (b-c)]^2 = \left[b+c \pm \frac{a(b-c)}{b+c} \right]^2 \quad (6.8)$$

De (6.8) e utilizando a equação com sinal positivo, temos:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[b + c + \frac{a(b-c)}{b+c} \right]^2 = 4m^2 + [a + b - c]^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left[b + c + \frac{a(b-c)}{b+c} \right]^2 = 4m^2 + (2s - c - c)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left[b + c + \frac{a(b-c)}{b+c} \right]^2 = 4[m^2 + (s - c)^2]
\end{aligned}$$

Como a, b , e c são medidas dos lados de um triângulo temos que:

$$a > 0, b > 0, c > 0 \quad (6.9)$$

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b \quad (6.10)$$

Vejamos que $b + c + \frac{a(b-c)}{b+c} > 0$:

$$\begin{aligned}
b + c + \frac{a(b-c)}{b+c} &= b + \frac{bc + c^2 + ab - ac}{b+c} = \\
&= b + \frac{c(b+c-a) + ab}{b+c} > 0
\end{aligned}$$

Então podemos concluir que:

$$\Leftrightarrow b + c + \frac{a(b-c)}{b+c} = 2\sqrt{m^2 + (s-c)^2} \quad (6.11)$$

De forma equivalente temos:

$$\begin{aligned}
&\left[b + c - \frac{a(b-c)}{b+c} \right]^2 = 4m^2 + [a - (b-c)]^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left[b + c - \frac{a(b-c)}{b+c} \right]^2 = 4[m^2 + (s-b)^2] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow b + c - \frac{a(b-c)}{b+c} = 2\sqrt{m^2 + (s-b)^2} \quad (6.12)
\end{aligned}$$

Somando (6.11), (6.12) obtemos

$$b + c = \sqrt{m^2 + (s-b)^2} + \sqrt{m^2 + (s-c)^2} \quad (6.13)$$

e de forma equivalente para:

$$a + c = \sqrt{n^2 + (s - a)^2} + \sqrt{n^2 + (s - c)^2} \quad (6.14)$$

$$a + b = \sqrt{p^2 + (s - a)^2} + \sqrt{p^2 + (s - b)^2} \quad (6.15)$$

Seja $\alpha > 0$ e considere-se a função contínua $f_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \left]0, \frac{\alpha}{2}\right]$, definida da seguinte maneira:

$$f_\alpha(u) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + u^2} - u}{2}.$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$a = y + z, \quad b = x + z \quad \text{e} \quad c = x + y \quad (6.16)$$

ou seja

$$x = s - a, \quad y = s - b \quad \text{e} \quad z = s - c \quad (6.17)$$

a relação (6.13) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$x = \frac{\sqrt{m^2 + y^2} - y}{2} + \frac{\sqrt{m^2 + z^2} - z}{2} = f_m(y) + f_m(z) \quad (6.18)$$

De maneira equivalente para y e z obtemos:

$$y = \frac{\sqrt{n^2 + x^2} - x}{2} + \frac{\sqrt{n^2 + z^2} - z}{2} = f_n(x) + f_n(z) \quad (6.19)$$

$$z = \frac{\sqrt{p^2 + x^2} - x}{2} + \frac{\sqrt{p^2 + y^2} - y}{2} = f_p(x) + f_p(y) \quad (6.20)$$

Derivando temos $f'_\alpha(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}} - 1 \right) < 0$, ou seja a função f_α é decrescente em \mathbb{R}^+ .

Para $u > 0$, como $\alpha > 0$, e $\frac{u}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}} = \sqrt{\frac{u^2}{\alpha^2 + u^2}} < 1$ temos que $\left| \frac{u}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}} - 1 \right| < 1$ e consequentemente $|f'_\alpha(u)| < \frac{1}{2}$, $\forall u > 0$. Aplicando o teorema do valor-médio de Lagrange (ver Teorema 7.1) e as desigualdades anteriores temos

$$|f_\alpha(u) - f_\alpha(u')| < \frac{1}{2} |u - u'|, \text{ para todos os } u \neq u' \text{ em } \mathbb{R}^+ \quad (6.21)$$

Dados quaisquer números reais positivos m, n, p seja

$$C = [0, m] \times [0, n] \times [0, p]$$

um conjunto compacto de \mathbb{R}^3 e a função contínua $F : C \rightarrow C$, definida por:

$$F(x, y, z) = (f_m(y) + f_m(z), f_n(x) + f_n(z), f_p(x) + f_p(y)) \quad (6.22)$$

Tendo em conta (6.18), (6.19), (6.20) concluímos que (6.22) se resume a

$$F(x, y, z) = (x, y, z) \quad (6.23)$$

sempre que x, y e z verificam (6.17) num triângulo de medidas das bissetrizes m, n, p .

Se (6.23) tem solução, o triângulo com os comprimentos dos lados dados por (6.16), verifica (6.13), (6.14) e (6.15) e consequentemente as medidas das bissetrizes são dadas por (6.5), (6.6) e (6.7).

Vamos então provar que existe e é único o ponto fixo da função F .

Existência - Pelo teorema de Brouwer sabemos que como C é homeomorfo à bola unitária, então F tem pelo menos um ponto fixo.

Unicidade - Se provarmos que

$$\| F(x, y, z) - F(x', y', z') \| < \| (x, y, z) - (x', y', z') \|$$

por um argumento semelhante ao usado na demonstração do teorema (3.5), temos a unicidade do ponto fixo.

$$\begin{aligned} & \| F(x, y, z) - F(x', y', z') \|^2 = \\ & \| f_m(y) - f_m(y') + f_m(z) - f_m(z'), f_n(x) - f_n(x') + f_n(z) - f_n(z'), \\ & f_p(x) - f_p(x') + f_p(y) - f_p(y') \|^2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Por facilidade de escrita seja:

$$\begin{aligned} M_y &= f_m(y) - f_m(y'), & M_z &= f_m(z) - f_m(z') \\ N_x &= f_n(x) - f_n(x'), & N_z &= f_n(z) - f_n(z') \end{aligned}$$

$$P_x = f_p(x) - f_p(x'), \quad P_y = f_p(y) - f_p(y')$$

$$X = x - x', \quad Y = y - y', \quad Z = z - z'$$

Por (6.21) temos:

$$|M_y| = |f_m(y) - f_m(y')| < \frac{1}{2} |y - y'| = \frac{1}{2} Y$$

e analogamente para M_z , N_x , N_z , P_x e P_y . Reescrevendo (6.24)

$$\begin{aligned} \|F(x, y, z) - F(x', y', z')\|^2 &= (M_y + M_z)^2 + (N_x + N_z)^2 + (P_x + P_y)^2 \leq \\ &M_y^2 + M_z^2 + 2|M_y| \times |M_z| + N_x^2 + N_z^2 + 2|N_x| \times |N_z| + P_x^2 + P_y^2 + 2|P_x| \times |P_y| < \\ &\frac{1}{4}|Y|^2 + \frac{1}{4}|Z|^2 + \frac{1}{4}|X|^2 + \frac{1}{4}|Z|^2 + \frac{1}{4}|X|^2 + \frac{1}{4}|Y|^2 + \\ &\frac{|Y| \times |Z|}{2} + \frac{|X| \times |Z|}{2} + \frac{|X| \times |Y|}{2} = \\ &\frac{1}{2}|Y|^2 + \frac{1}{2}|Z|^2 + \frac{1}{2}|X|^2 + \frac{|Y| \times |Z|}{2} + \frac{|X| \times |Z|}{2} + \frac{|X| \times |Y|}{2} \leq \\ &\frac{1}{2}|Y|^2 + \frac{1}{2}|Z|^2 + \frac{1}{2}|X|^2 + \\ &\frac{|Y|^2}{4} + \frac{|Z|^2}{4} + \frac{|X|^2}{4} + \frac{|Z|^2}{4} + \frac{|X|^2}{4} + \frac{|Y|^2}{4} = \\ &|Y|^2 + |Z|^2 + |X|^2 = |(y - y')|^2 + |(z - z')|^2 + |(x - x')|^2 = \\ &\|(x - x'), (y - y'), (z - z')\|^2 = \|(x, y, z) - (x', y', z')\|^2 \end{aligned}$$

Concluimos então que dados quaisquer três números positivos m , n e p , existe e é único, a menos de uma isometria, um triângulo cujas bissetrizes medem m, n, p . As medidas dos lados desse triângulo são dadas por (6.16).

Isto contradiz os outros resultados semelhantes para os triângulos. As medidas das medianas m , n e p têm que satisfazer:

$$m < n + p, \quad n < m + p, \quad p < m + n;$$

as alturas têm que satisfazer :

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{n} + \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{m} + \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p} < \frac{1}{n} + \frac{1}{m};$$

e as medidas dos lados têm que satisfazer:

$$|n - p| < m < n + p, \quad |m - p| < n < m + p, \quad |n - m| < p < n + m$$

logo m , n e p não podem por isso ser números arbitrários nestes últimos casos.

6.3 Uma aplicação 'meteorológica'

Será que existem dois pontos na Terra, com a mesma temperatura e a mesma pressão atmosférica?



Figura 6.3: Earth

Seja $t(P)$ a temperatura num determinado ponto P da Terra e $a(P)$ a pressão atmosférica nesse mesmo ponto (supondo que a temperatura e a pressão atmosférica são contínuas). Consideremos a função contínua $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $F(P) = (t(P), a(P))$. Pelo teorema de Borsuk-Ulam, existe um par de pontos antípodos P e P^* tais que $F(P) = F(P^*)$, ou seja,

$$(t(P), a(P)) = (t(P^*), a(P^*))$$

sendo assim os pontos P e P^* têm a mesma temperatura e a mesma pressão.

6.4 Uma aplicação 'Groumet 1'

Será que se pode dividir ao meio com um só corte reto duas panquecas colocadas num prato?

Apresentamos a seguir o teorema conhecido como o teorema das panquecas.



Figura 6.4: Panquecas

Teorema 6.1 (das Panquecas). Consideremos dois subconjuntos A e B limitados, com área finita, abertos, conexos do plano. Existe uma reta no plano que divide cada um deles em dois subconjuntos de mesma área.

Demonstração. Seja C uma circunferência que contém A e B , ver Figura 6.5.

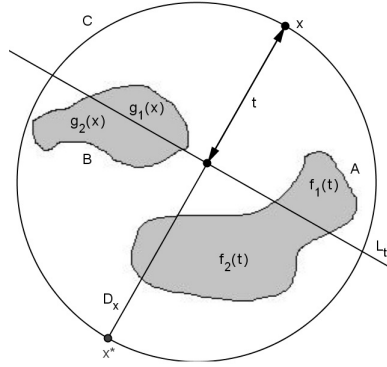


Figura 6.5: teorema das panquecas

Para cada ponto $x \in C$ seja D_x o diâmetro da circunferência C que passa por x . L_t uma recta perpendicular a D_x , que passa por um ponto situado em D_x , localizado à distância t de x ($0 \leq t \leq d$, onde d é o diâmetro de C). Seja $f_1(t)$ a área da figura A que está do mesmo lado de L_t que x e $f_2(t)$ a área da outra parte. As funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ estão definidas no intervalo $[0, d]$ e aí são contínuas. Consideremos a função contínua definida por $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$. Temos $f(0) = -f(d)$, então pelo teorema do valor intermédio sabemos que existe um valor de $t \in [0, d]$, tal que $f(t) = 0 \Leftrightarrow f_1(t) = f_2(t)$. Portanto a linha L_t que passa por esse ponto, chamemos-lhe $L_{\tau(x)}$, divide a área de A

ao meio. Esta linha também divide a figura B em duas partes. Seja $g_1(x)$ a área da figura B que está mais perto de x e $g_2(x)$ a área da outra parte. As funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$ estão definidas em C e aí são contínuas, bem como a sua diferença $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Quando o ponto x se move continuamente ao longo de C irá chegar ao seu antípoda, x^* , aí as duas partes da figura B trocam de lugar, pelo que temos

$$g(x) = -g(x^*) \quad (6.25)$$

para todos os pontos de x ao longo de C . Pelo teorema de Borsuk-Ulam (3.1), sabemos que

$$g(x) = g(x^*), \quad x \in C \quad (6.26)$$

Pelas equações anteriores (6.25) e (6.26) $x \in C$ tal que

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = g_2(x)$$

Concluindo, existe um ponto $x \in C$, para o qual a linha $L_{\tau(x)}$ corta ambas as figuras A e B ao meio. (q.e.d.)

6.5 Uma aplicação 'Groumet 2'

É sempre possível, bissetar três corpos, arbitrariamente localizados, com o auxílio de um plano apropriado?

Este problema apareceu segundo [2] no livro [8] no problema 123 e foi colocado por Hugo Steinhaus (ver Secção 7.1.13).

Esta questão poderá ser reformulada da seguinte maneira: é possível cortar uma sandes mista, de modo que o pão, o fiambre e o queijo fiquem bissetados?

Seja $D \in \mathbb{R}^3$ e considere-se a superfície esférica S de centro em D e raio R . A cada ponto P da superfície associamos um plano α , tangente à superfície esférica.



Figura 6.6: sandes mista

Sejam A, B e C três corpos no espaço de volumes não nulos, a, b e c respetivamente, que iremos bissestar e cuja interseção com a esfera é vazia.

Consideremos o plano β paralelo a α . Chamaremos *parte de cima de β* ao semi-espaço que contém P . Consideramos ainda que a *parte de cima de β* bisseta o corpo A , ou seja o volume de A , na *parte de cima de β* é $\frac{a}{2}$.

A localização deste plano, β , é sempre possível; caso exista mais do que um plano nestas condições, consideramos a localização média dos planos que se encontram nos extremos da região admissível.

Consideremos que o volume de B na *parte de cima de β* é $x(P)$; o volume de C correspondente à *parte de cima de β* é $y(P)$. Obtemos assim uma aplicação contínua da esfera em \mathbb{R}^2 e pelo teorema (3.1) obtemos pontos antípodos P, P^* tais que $x(P) = x(P^*)$ e $y(P) = y(P^*)$. Além disso, o plano β , nestas condições bisseta, não só A (pela própria definição do plano) como B e C .

6.6 Uma aplicação 'ruidosa'

Será que se pode "levar" a pele de um tambor até ao seu bordo, sem a rasgar?

A resposta é não e a justificação é dada pelo teorema da não-retração (3.3) tendo em conta as seguintes identificações:

- i) a pele do tambor B^2 ;
- ii) o bordo do tambor ∂B^2 .

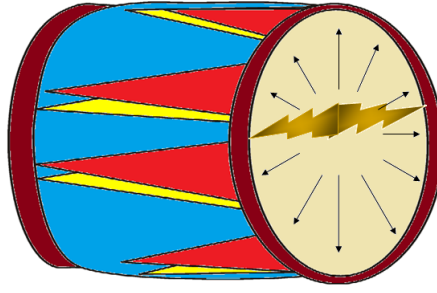


Figura 6.7: Tambor

6.7 Uma aplicação 'cosmética'

Será que podemos pentear a Mafalda sem deixar nenhum cabelo em pé?



Figura 6.8: Mafalda acorda. Mundo treme!

Responderemos a esta questão aplicando o teorema 4.1. Imaginemos que a cabeça da Mafalda é uma bola completamente cheia de cabelos.

Cada vetor \vec{v} pode ser decomposto numa componente normal \vec{v}^N , e numa componente tangencial \vec{v}^T , ou seja $\vec{v} = \vec{v}^T + \vec{v}^N$ com $\langle \vec{x}, \vec{v}^T \rangle = 0$ e \vec{x}, \vec{v}^N colineares, ver figura (6.9).

Pelo teorema da esfera cabeluda aplicado a S^2 , qualquer campo de vetores sobre a esfera tem pelo menos um ponto onde o campo tangencial é nulo, o que é equivalente a dizer temos um ponto onde o campo é normal à esfera, ou seja irá haver sempre pelo menos um cabelo em pé e por isso não conseguiremos pentear a Mafalda.

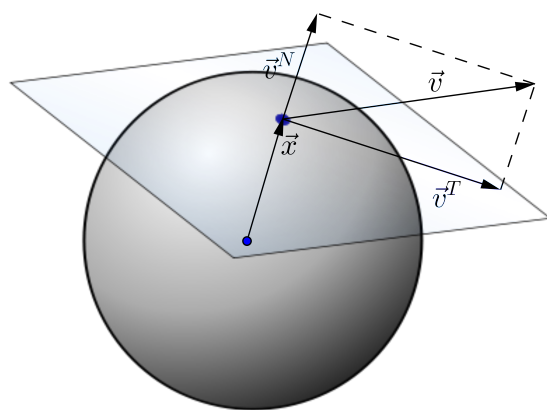


Figura 6.9: decomposição de um vetor

Capítulo 7

Apêndices

7.1 Biografia

Iremos apresentar uma pequena biografia dos matemáticos referidos neste trabalho. Irão aparecer tendo em conta a ordem com a qual vão sendo referidos nesta dissertação.

7.1.1 Luitzen Egbertus Jan Brouwer



Figura 7.1: Luitzen Egbertus Jan Brouwer

Matemático e filósofo holandês nasceu a 27 de fevereiro de 1881 em Overschie e morreu a 2 de dezembro de 1966 em Blaricum, Países Baixos.

Iniciou os seus estudos superiores na Universidade de Amesterdão aos 16 anos e ainda estudante, a Academia Real de Ciências de Amesterdão, publicou o seu primeiro trabalho com resultados originais sobre movimentos contínuos

em quatro dimensões. A topologia e os fundamentos da matemática foram também outros interesses de Brouwer.

A tese de doutoramento de Brouwer, publicada em 1907, levou à criação do ramo da lógica Intuicionismo e deu um importante contributo para o debate em curso entre Russell e Poincaré sobre os fundamentos lógicos da matemática. Na sua tese trabalhou também em teoria dos conjuntos, medida matemática e análise complexa. Em 1912 provou o teorema, que ficou batizado como teorema do ponto fixo de Brouwer em sua homenagem.

7.1.2 Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano



Figura 7.2: Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano

Matemático, teólogo e filósofo da antiga Boémia nasceu a 5 de outubro de 1781 em Praga e morreu a 18 de dezembro de 1848. Em 1796 entrou na Universidade de Praga onde estudou teologia, filosofia e matemática. Em 1805 foi ordenado sacerdote da Igreja Católica. Lecionou na Faculdade de Filosofia da Universidade Charles. Bolzano foi suspenso de seu cargo em dezembro 1819, após pressão do governo austríaco. Além de ser suspenso de seu cargo de professor, foi colocado sob prisão domiciliar, nesta altura a sua correspondência era censurada e não lhe era permitido publicar quaisquer trabalhos. Foi neste período de proibição, em que passou a ser sustentado por amigos e por ex-alunos, que Bolzano escreveu sua principal obra filosófica, o "Wissenschaftslehre" (Doutrina da Ciência).

7.1.3 Karol Borsuk



Figura 7.3: Karol Borsuk

Matemático polaco nasceu a 8 de maio de 1905 e morreu a 24 de janeiro de 1982 em Warsaw .

Estudou na Universidade de Varsóvia, onde se doutorou em 1931. Foi professor de matemática a partir de 1946. Na matemática interessou-se essencialmente pela área da topologia. O teorema de Borsuk-Ulam é o resultado do seu trabalho conjunto com Ulam. Foi membro da Escola de Matemática de Varsóvia, e desde 1956 da Academia de Ciências da Polónia.

7.1.4 Augustin Louis Cauchy



Figura 7.4: Augustin Louis Cauchy

Matemático francês nasceu a 21 de agosto de 1789 em Paris e morreu em Sceaux (próximo de Paris) a 23 de maio de 1857. Passou a sua infância no período da Revolução Francesa (1789-1799). Cauchy ingressou na 'École Centrale du Panthéon' com a idade de treze anos onde passou dois anos a

estudar línguas clássicas. Na escola ganhou o primeiro prémio em grego, latim, composição e verso. Em 1804 Cauchy (amigo da família) ensinou-lhe intensivamente matemática. Depois de um ano de preparação Bolzano com a idade de dezesseis anos, ingressou na 'École Polytechnique' e terminou o seu curso em 1807 entrando de seguida na escola de engenharia 'École des Ponts et Chaussées'. Era um católico assumido e apesar de tais crenças lhe terem criado alguns dissabores manteve sempre as suas ideias.

Aos 25 anos, escreveu um artigo (que apenas foi publicado em 1927), que o lançou para uma grande carreira matemática. Aos 27 anos já fazia parte do grupo dos melhores matemáticos vivos.

A sua produtividade em publicação de artigos era tão prodigiosa que se viu obrigado a fundar uma espécie de jornal, o Exercices de Mathématiques (1826-1830) seguido de um outro, Exercices d'Analyse Mathématique et de Physique, para publicação de sua obra. O total das suas obras alcança 789 artigos (muitos dos quais muito extensos) preenchendo vinte e quatro volumes.

Foi um dos fundadores da teoria de grupos finitos. Em análise infinitesimal, criou a noção moderna de continuidade para as funções de variável real ou complexa. Mostrou a importância da convergência das séries inteiras, às quais o seu nome está ligado.

7.1.5 Simon Stevin



<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>

Figura 7.5: Simon Stevin

Matemático, engenheiro e físico nascido na Bélgica em Bruges. Tanto a

data de nascimento como a da morte são incertas supõe-se que foram respetivamente em 1548/1549 e 1620.

Com a idade de 35 anos, entrou na Universidade de Leiden.

O autor de 11 livros, Simon Stevin fez contribuições significativas para a trigonometria, mecânica, arquitetura, teoria musical, geografia, fortificação, e navegação. Seu primeiro livro foi 'Tafelen Interesse van' (tabelas de juros), que publicou em 1582.

Em 1585, ele publicou *La Theinde* no qual ele apresentou uma conta elementar e completa de frações decimais. Foi neste livro que apareceu pela primeira vez na Europa a utilização matemática dos números decimais (antes de Stevin os números decimais já eram usados pelos chineses e árabes). No mesmo ano publicou 'La pratique d'arithmétique', onde aparece um método unificado para a resolução de equações quadráticas e um método para encontrar soluções aproximadas de equações algébricas de todos os graus. Neste livro também faz um forte apelo para que todos os números como a raiz quadrada, números irracionais, números negativos fossem tratados como números e não distinguidos como sendo de natureza diferente. Este conceito de número real foi bem aceite pela grande maioria dos cientistas que lhe precederam.

7.1.6 George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor



Figura 7.6: George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Matemático russo de origem alemã, nasceu a 3 de Março de 1845 em St Petersburg, Russia e morreu a 6 de Janeiro de 1918 na Alemanha.

Em 1862 Cantor entrou na universidade em Zurique. Entretanto voltou a Berlim e foi presidente da Sociedade de Matemática nos anos de 1864 e 1865. Doutorou-se em 1867.

Em 1872 tornou-se docente na Universidade de Halle-Wittenberg, na cidade alemã Halle an der Saale, onde obteve o título de professor em 1879.

Conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos, foi a partir desta teoria que chegou ao conceito de número transfinito, incluindo as classes numéricas dos cardinais e ordinais e estabelecendo a diferença entre estes dois conceitos, que colocam novos problemas quando se referem a conjuntos infinitos.

Fez a distinção entre conjuntos numeráveis e conjuntos contínuos (ou não-numeráveis). Provou que o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é numerável, enquanto que o conjunto dos números reais \mathbb{R} é contínuo. Desenvolveu ainda o estudo de séries trigonométricas.

7.1.7 Stanislaw Marcin Ulam



Figura 7.7: Stanislaw Marcin Ulam

Matemático polaco nasceu a 3 de abril de 1909 e morreu a 13 de maio de 1984 nos Estados Unidos. Pensa-se que a sua motivação para estudar matemática a fundo apareceu quando tinha 14 anos e quis compreender a teoria da relatividade. Além da matemática também tinha interesse em astronomia e física. Entrou no Instituto Politécnico. Em 1940 Ulam foi nomeado como professor assistente na Universidade de Wisconsin. Em 1943 Ulam tornou-se cidadão americano. Neste mesmo ano foi trabalhar para 'Los Alamos National

Laboratory' na bomba de hidrogénio, no Novo México. Numa das visitas que fez ao centro matemático em Lvov, Polónia, encontrou-se com Borsuk e desde o início começaram a trabalhar em conjunto. Na sequência dessa colaboração publicaram um artigo no boletim da American Mathematical Society.

7.1.8 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass



Figura 7.8: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Matemático alemão nascido a 31 de outubro de 1815 em Berlim e morreu a 19 de fevereiro de 1897.

Em 1839, Weierstrass entrou para a Academia de Münster, com o objetivo de obter um título em educação secundária. Nos 15 anos seguintes à sua licenciatura, ensinou alemão, caligrafia, geografia e matemática em uma escola secundária. Enquanto foi professor do ensino secundário grande parte do seu trabalho não foi publicado.

Somente em 1854 publicou um artigo de maior importância, 'Zur Theorie der Abelschen Functionen' o que o levou à fama matemática internacional. No mesmo ano recebeu, da Universidade de Königsberg, um título de doutor honorário, e, em 1856, na Universidade de Berlim, teve início a sua carreira como professor universitário. Em 1872, descobriu uma função que, embora contínua, não tinha derivada em nenhum ponto. Os seus trabalhos forneceram as bases da teoria das funções analíticas. Criador do conceito de limite de uma função.

7.1.9 Emanuel Sperner



Figura 7.9: Emanuel Sperner

Matemático alemão nasceu a 9 de dezembro de 1905 e morreu a 31 de janeiro de 1980. Estudou na Universidade de Hamburgo. Em 1928 apresentou um lema combinatório que ficou conhecido com 'Lema de Sprener'. Foi professor na Universidade de Königsberg em 1934, de 1943 a 1945 na Universidade de Estrasburgo, de 1946 a 1949 na Universidade de Freiburg, de 1949 a 1954 na Universidade de Bonn e de 1954 a 1974 na Universidade de Hamburgo.

7.1.10 Jean Leray

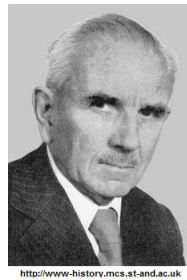


Figura 7.10: Jean Leray

Matemático francês nasceu a 7 de novembro de 1906 em Chantenay, perto de Nantes e morreu a 10 de novembro de 1998. Começou por trabalhar em hidrodinâmica. Em 1933 conheceu Juliusz Schauder e juntos escreveram um artigo sobre topologia e equações diferenciais parciais, que foi publicado em 'Annales scientifiques de l'École normale Supérieure'. Neste artigo publicado

em 1934 aparece a definição do grau de Leray-Schauder e mostra-se a sua invariância relativamente à homotopia. Nos dias de hoje este conceito é uma ferramenta fundamental para provar a existência de soluções de equações diferenciais parciais mais complicadas.

Em 1936 Leray foi Professor na Faculdade de Ciências de Nancy.

Leray serviu como oficial do exército na segunda guerra mundial, e em 1940 foi capturado e enviado para um campo de prisioneiros de guerra na Áustria, onde permaneceu até o fim da guerra em 1945. No campo de prisioneiros, Leray e alguns de seus companheiros organizaram uma espécie de universidade em cativeiro. Leray quis esconder dos alemães que era especialista em hidrodinâmica com medo de ser recrutado para trabalhar na guerra a favor dos alemães, disse que a sua especialidade era topologia. Após a sua libertação em 1945 Leray publicou um trabalho de topologia algébrica que tinha estudado enquanto esteve prisioneiro. Recebeu vários prémios pelos seus trabalhos.

7.1.11 Juliusz Pawel Schauder



<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>

Figura 7.11: Juliusz Pawel Schauder

Matemático polaco nasceu a 21 de setembro de 1899 e morreu em setembro 1943. Em 1919 entrou na Universidade e em 1923 fez o doutoramento com uma tese sobre a teoria da medida de superfície. Schauder publicou teoremas de ponto fixo para espaços de Banach em 1930. Em 1932, foi premiado com uma bolsa Rockefeller. Com o financiamento dessa bolsa Schauder foi para Leipzi (alemanhã) e Paris, onde conheceu e trabalhou com Leray.

A principal conquista Schauder consiste na transferência de algumas noções topológicas e teoremas para espaços de Banach (o teorema de ponto fixo, a invariância de domínio, o conceito de índice).

7.1.12 Jules Henri Poincaré



Figura 7.12: Jules Henri Poincaré

Matemático, filósofo e homem de letras francês nasceu a 29 de abril de 1854 em Nancy e morreu a 17 julho de 1912 em Paris. Em 1862, Henri entrou no Liceu em Nancy (agora rebatizado de Lycée Henri Poincaré em sua homenagem). Durante este tempo provou ser um dos melhores alunos em cada tópico que estudou. Henri foi descrito pelo seu professor de matemática como um 'monstro da matemática'. Poincaré entrou na escola politécnica em 1873 e terminou este ciclo em 1875. Doutorou-se em matemática na Universidade de Paris em 1879. A sua tese foi sobre equações diferenciais. Começou a lecionar na Faculdade de Ciências de Paris, em 1881.

Poincaré era um cientista preocupado com muitos aspectos da matemática, da física e da filosofia, é frequentemente descrito como o último universalista em matemática. Tem contribuições em vários ramos da matemática, mecânica celeste, mecânica dos fluidos, teoria especial da relatividade e filosofia da ciência.

Poincaré também é considerado o criador da teoria das funções analíticas de várias variáveis complexas. Trabalhou ainda em geometria algébrica.

Em matemática aplicada estudou ótica, eletricidade, telegrafia, capilaridade, elasticidade, termodinâmica, teoria potencial, teoria quântica, teoria da

relatividade e cosmologia . No campo da mecânica celeste, estudou o problema dos três corpos, e as teorias da luz e das ondas eletromagnéticas.

7.1.13 Hugo Dyonizy Steinhaus



Figura 7.13: Hugo Dyonizy Steinhaus

Matemático nascido no antigo Império Austríaco a 14 de janeiro de 1887 e morreu a 25 de fevereiro de 1972 na Polónia. Steinhaus estudou matemática durante cinco anos na Universidade de Göttingen. Em 1911 doutorou-se, com distinção.

Em 1916, Steinhaus iniciou uma colaboração com Banach e publicaram o seu primeiro trabalho conjunto. Steinhaus assumiu um cargo de assistente na Universidade Jan Kazimierz em Lvov e, por volta de 1920, foi promovido a professor extraordinário.

Steinhaus foi a figura principal na Escola Lvov até 1941. Em 1923, publicou em 'Fundamenta Mathematicae' o primeiro relato rigoroso da teoria de jogos de moedas com base na teoria da medida. Em 1925, foi o primeiro a definir e discutir o conceito de estratégia na teoria dos jogos. Steinhaus publicou o seu segundo trabalho conjunto com Banach em 1927 'Sur le principe de la condensation des singularités' . Em 1929, juntamente com Banach , iniciaram e foram os primeiros editores, de uma nova revista 'Studia Mathematica'.

Outras contribuições de Steinhaus foram em séries ortogonais, teoria da probabilidade, funções reais e suas aplicações. Foi o primeiro a tornar precisos os conceitos de 'independente' e 'uniformemente distribuído'.

7.1.14 Heinrich Franz Friedrich Tietze

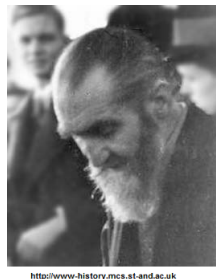


Figura 7.14: Heinrich Franz Friedrich Tietze

Matemático austríaco nasceu a 31 de agosto de 1880 in Schleinz e morreu a 17 fevereiro de 1964 em Munich, Alemanha. Doutorou-se em 1902 na universidade de Viena. 1919 foi professor na Universidade de Erlangen. Depois de seis anos em Erlangen, Tietze foi para a Universidade de Munique. Permaneceu em Munique para o resto de sua vida, jubilou-se em 1950. Apesar de jubilado continuou o seu interesse pela matemática e estudou quase até o momento de sua morte, aos 83 anos.

7.2 Alguns conceitos e definições

Nesta secção iremos apresentar alguns conceitos que são referidos aos longo do trabalho

Definição 7.2.1. Uma *métrica* num conjunto M é uma função

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- d1) $d(x, x) = 0$
- d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$
- d3) $d(x, y) = d(y, x)$
- d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definição 7.2.2. Um *espaço métrico* é um par (M, d) onde M é um conjunto e d uma métrica em M .

Definição 7.2.3. Uma sucessão $\{x_n\}$ num espaço métrico M chama-se *uma sucessão de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definição 7.2.4. Sejam M e N espaços métricos. Um *homeomorfismo de M sobre N* é uma bijeção contínua $f : M \longrightarrow N$ cuja inversa $f^{-1} : N \longrightarrow M$ também é contínua. Neste caso, dizemos que M e N são *homeomorfos* (ou topologicamente equivalentes).

Definição 7.2.5. Uma propriedade de um espaço M , diz-se *propriedade topológica*, se em qualquer espaço homeomorfo a M também se verifica essa propriedade.

Definição 7.2.6. Diz-se que um espaço topológico M tem a propriedade de ponto fixo (P.P.F.), quando toda aplicação contínua $f : M \longrightarrow M$ possui ponto fixo.

Com efeito prova-se que a propriedade do ponto fixo, é uma propriedade topológica.

Proposição 7.2.1. Se M tem a propriedade do ponto fixo e N é homeomorfo a M , então N tem a propriedade do ponto fixo.

Demonstração. Se M possui propriedade do ponto fixo e N é homeomorfo a M , dada uma aplicação contínua $f : N \longrightarrow N$, segue que $\phi^{-1} \circ f \circ \phi : N \rightarrow M$, onde $\phi : M \rightarrow N$ é um homeomorfismo, é contínua. E, portanto, existe $x \in M$ tal que $(\phi^{-1} \circ f \circ \phi)(x) = x$. Isso quer dizer que $f(\phi(x)) = \phi^{-1}(x)$. Ou seja, $\phi(x) \in N$ é ponto fixo de f , ou seja, N possui propriedade do ponto fixo. (q.e.d.)

Definição 7.2.7 (Conjunto Compacto). Um conjunto é compacto, se toda a sucessão de pontos no conjunto admitir uma subsucessão convergente.

Proposição 7.2.2. Um subconjunto de \mathbb{R}^n é compacto sse for fechado e limitado.

Definição 7.2.8. Chama-se campo contínuo de vetores tangentes unitários à superfície esférica à função V contínua que a cada x faz corresponder $V(x)$ tal que $|V(x)| = 1$ e $\langle x, V(x) \rangle = 0$.

Teorema 7.1 (do valor médio de Lagrange). Seja f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$ então existe $c \in]a, b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Definição 7.2.9. Chama-se *invólucro convexo* de M , $\text{co}(M)$, ao menor convexo que contém M .

Teorema 7.2 (de Tietze). Seja $T : M \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no conjunto fechado não vazio. Então existe uma extensão contínua \bar{T} de T , tal que $\bar{T} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \text{co}(T(M))$

Proposição 7.2.3. Num triângulo $[ABC]$ qualquer, de lados opostos aos ângulos internos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , com medidas a , b , c respectivamente. A área do triângulo $A_{[ABC]}$ é dada por:

$$A_{[ABC]} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2} = \frac{ac \sin \hat{B}}{2} = \frac{ab \sin \hat{C}}{2}$$

Demonstração. Consideremos o triângulo representado na figura 7.15

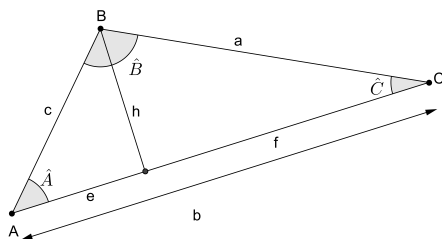


Figura 7.15: Bissetrizes internas do triângulo

Sabemos que

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2} \tag{7.1}$$

Por outro lado sabemos que $\sin \hat{A} = \frac{h}{c} \Leftrightarrow h = c \sin \hat{A}$. Substituindo em (7.1) temos $A_{[ABC]} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}$ e equivalentemente para $A_{[ABC]} = \frac{ac \sin \hat{B}}{2}$ e $A_{[ABC]} = \frac{ab \sin \hat{C}}{2}$ (q.e.d.)

Proposição 7.2.4 (Lei dos cossenos). Em qualquer triângulo $[ABC]$, de lados opostos aos ângulos internos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , com medidas a , b , c respetivamente verificam-se as seguintes igualdades:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad (7.2)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad (7.3)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \quad (7.4)$$

Demonstração. Iremos demonstrar apenas (7.2) e analogamente se prova (7.3) e (7.4).

Sabemos que :

$$b = e + f \Leftrightarrow f = b - e \quad (7.5)$$

$$e = c \cos \hat{A} \quad (7.6)$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = f^2 + h^2 \quad (7.7)$$

$$c^2 = e^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - e^2 \quad (7.8)$$

Substituindo em (7.7),

$$a^2 = f^2 + h^2 \Leftrightarrow a^2 = (b - e)^2 + c^2 - e^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 = b^2 - 2be + e^2 + c^2 - e^2 \underset{(7.6)}{\Leftrightarrow} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

(q.e.d.)

Bibliografia

- [1] Apostol, Tom M. *Calculus*. John Wiley & Sons, 2nd Edition.
- [2] Beyer, W. A. e Zardecki, Andrew *The Early History of the Sandwich Theorem*. The Mathematical Association of America [Monthly 111, Jan. 2004] pp. 58-61.
- [3] Burton, David *The History of Mathematics: An Introduction* McGraw Hill, 2006, 6th Edition.
- [4] Dinca, George e Mawhin, Jean *A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society- Simon Stevin, Volume 17, Number 2 (2010), pp. 333-341.
- [5] Fenille, Marcio C. *Minicurso: Os três B's da Teoria Topológica de Pontos Fixos: Bolzano, Brouwer e Borsuk*.

[http://sites.google.com/site/mcfenille/
conferencias-minicursos](http://sites.google.com/site/mcfenille/conferencias-minicursos).
- [6] Lima, Elon Lages *Análise Real*. Coleção Matemática Universitária, 1989.
- [7] Lima, Elon Lages *Espaços métricos*. Projecto Euclides, 1997, 2º Edição.
- [8] Mauldin, R. D. *The Scottish Book*. Birkhauser, Boston. 1981.
- [9] Mawhin, Jean *Autour du théorème du point fixe*. Abril 2004

- [10] Mawhin, Jean *Le théorème du point fixe de Brouwer: un siècle de métamorphoses*. Sciences et Techniques en Perspective (2) 10 fasc. 2006, Blanchard, Paris pp. 175-220.
- [11] Mawhin, Jean *Leray-Schauder degree: a half century of extensions and applications*. Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of Juliusz Schauder Center Vol. 14, 1999 pp. 195-228.
- [12] Mawhin, Jean *Les points fixes d'une application ou l'existence géométrisée*.
- [13] Mironescu, Petru e Panaitopol, Laurentiu *The Existence of a triangle with Prescribed angle bisector lengths*. The American Mathematical Monthly, Vol. 101, N° 1 (Jan. 1994) pp. 58-60.
- [14] Needham, Tristan *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press Oxford.
- [15] Shashkin, Yu. A. *Fixed Points*. America Mathematical Society, 1991.
- [16] Su, Francis Edward *Borsuk-Ulam implies Brouwer: A direct construction*. Amer. Math. Monthly 104 (1997), 855-859.
- [17] Zeidler, Eberhard *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I- Fixed-Point Theorems* Springer-Verlag, 1986.
- [18] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.